Преобразования сигналов. Частотный анализ и модуляция

1. Зачем нужны преобразования сигналов?

Сигнал, представленный как функция времени (временна́я область), часто несёт информацию, которую удобнее анализировать в другой области. Например, музыкальное произведение во временной области — это сложная осциллограмма, но в частотной области мы видим, какие ноты (частоты) звучат в каждый момент.

Основные мотивы перехода в частотную область:

- **Анализ состава сигнала:** Какие частоты присутствуют?
- **Фильтрация:** Удаление нежелательных частот (шум, помехи).
- **Сжатие:** Отбрасывание малозначимых частотных компонент (JPEG, MP3).
- **Модуляция/демодуляция:** Передача информации на высоких частотах.

Ключевая идея: Представить сигнал как взвешенную сумму простых базисных функций (синусоид, косинусоид, вейвлетов). Коэффициенты этого разложения и есть представление сигнала в новой области.

2. Ортогональные преобразования

2.1 Понятие ортогональности

Две функции (вектора) называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю. В контексте преобразований это означает, что базисные функции не "перекрываются" и вклад каждой можно выделить независимо.

2.2 Общая схема ортогонального преобразования

Для дискретного сигнала длины N:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \phi_k[n], \quad k = 0, \ldots, N-1$$

где $\phi_k[n]$ — k-я базисная функция (ортогональная система).

Обратное преобразование восстанавливает сигнал:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot \psi_k[n]$$

где $\psi_k[n] \sim \phi_k[n]$ — k-я сопряжённая базисная функция.

Примеры ортогональных преобразований:

- Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) — базис: комплексные экспоненты $e^{j2\pi kn/N}$.
- Дискретное косинусное преобразование (ДКП) — базис: косинусы.
- Преобразование Уолша — Адамара — базис: периодические прямоугольные функции (принимают значения ±1).
- Вейвлет-преобразование — базис: масштабированные и сдвинутые вейвлеты (квазипериодические функции конечной длительности).

3. Преобразование Фурье

3.1 От непрерывного к дискретному

- **Ряд Фурье:** для периодических сигналов — разложение на гармоники с частотами, кратными основной.
- **Интеграл Фурье (непрерывное преобразование):** для непериодических сигналов — спектральная плотность.
- **Дискретное преобразование Фурье (ДПФ):** для конечных дискретных сигналов. Именно оно реализовано в компьютерах.

Формула ДПФ (прямое):

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, \ldots, N-1$$

$$e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x)$$

- $X[k]$ называют **Фурье-образом**, **Фурье-спектром** или просто **спектром** функции (сигнала) $x[n]$

Обратное ДПФ:

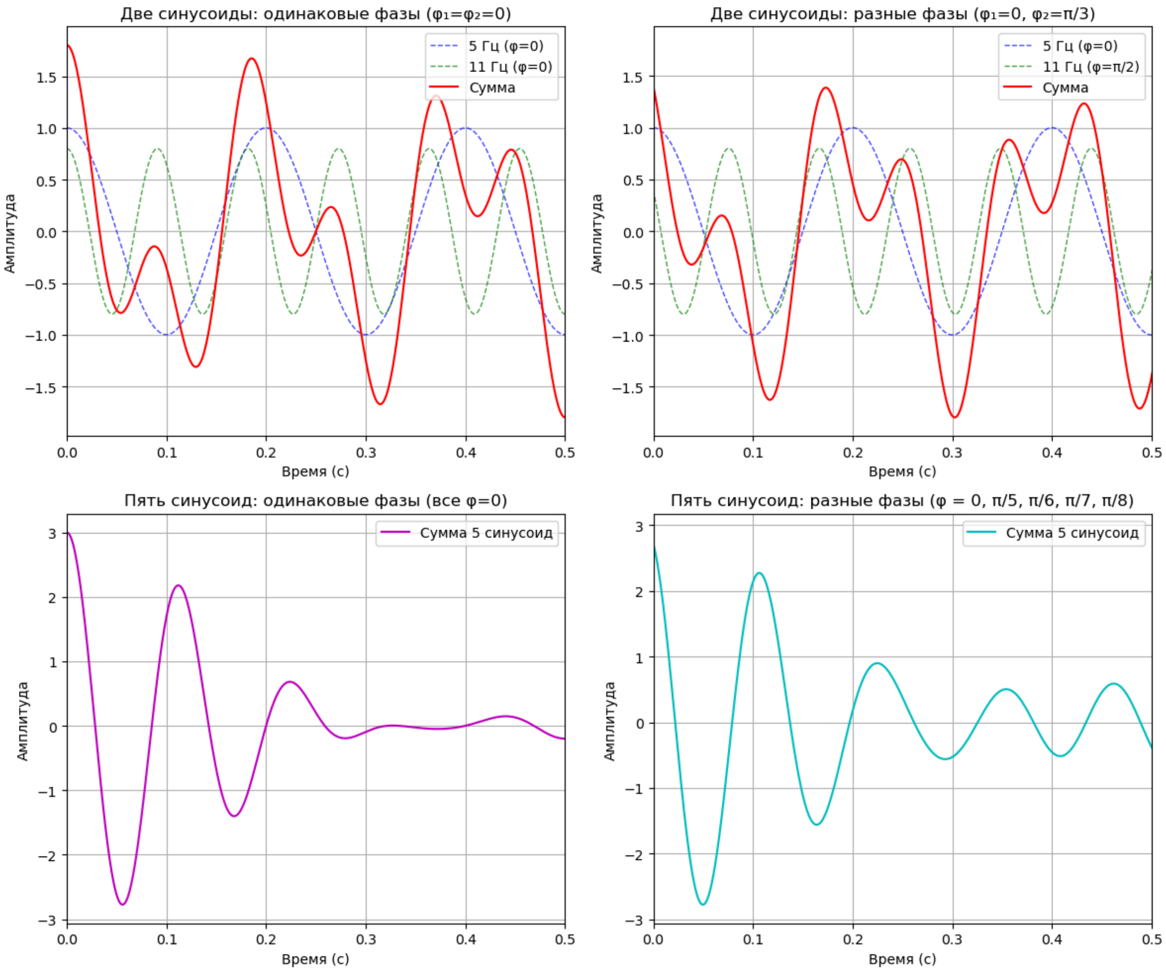
$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot e^{j2\pi kn/N}$$

Интерпретация:

- $X[k]$ — комплексное число, характеризующее гармонику с частотой $f_k = k \cdot f_s/N$ (где f_s — частота дискретизации).

$$X = Ae^{j\phi}$$

- **Амплитудный спектр:** $A[k] \equiv |X[k]|$ — показывает вклад частоты f_k.
- **Фазовый спектр:** $\phi[k] \equiv \arg(X[k])$ — показывает относительную фазу этой гармоники.



3.2 Свойства преобразования Фурье

- **Линейность:** преобразование суммы сигналов равно сумме преобразований.

$$x[n] \rightarrow X[k] \quad y[n] \rightarrow Y[k]$$

$$z[n] = x[n] + y[n] \rightarrow Z[k] = X[k] + Y[k]$$

- **Сдвиг во времени:** сдвиг сигнала приводит к линейному изменению фазы спектра.

$$x[n] \to X[k]$$

$$y[n] = x[n+m] \to Y[k] = X[k]e^{-j2\pi km/N}$$

- **Сдвиг по частоте (модуляция):** умножение сигнала на $\cos(2\pi f_0 t) = \cos(2\pi k_0 n)$ смещает спектр на $f_0 = k_0 f_s$.

$$x[n] \to X[k]$$

$$y[n] = x[n]cos(2\pi k_0 n) \to Y[k] = X[k+k_0]$$

- **Свёртка:** свёртка во времени соответствует умножению в частотной области (важно для фильтрации).

$$x[n] \to X[k] \quad y[n] \to Y[k]$$

$$z[n] = \sum_m x[m]y[n-m] \to Z[k] = X[k] \cdot Y[k]$$

4. Модуляция: запись информации в сигнал

Модуляция — процесс изменения параметров несущего колебания (высокочастотного) в соответствии с передаваемым сообщением (низкочастотным сигналом).

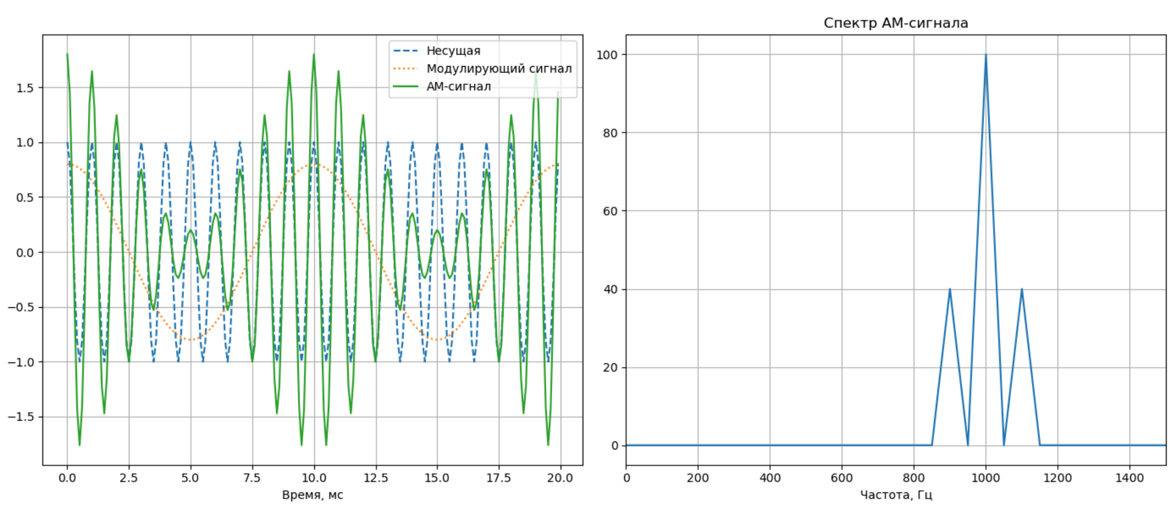
4.1 Амплитудная модуляция (АМ)

Принцип: Меняется амплитуда несущей пропорционально модулирующему сигналу.

- Несущая: $s(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t)$
- Модулирующий сигнал (сообщение): $m(t)$ (предполагаем, что $|m(t)| \leq 1$)
- АМ-сигнал: $s_{AM}(t) = A_0[1 + m(t)] \cos(2\pi f_0 t)$

Спектр АМ: Если $m(t)$ имеет спектр в полосе $[-B, B]$, то спектр АМ-сигнала содержит:

- Несущую на частоте f_0
- Две боковые полосы: верхняя ($f_0 + f_m$) и нижняя ($f_0 - f_m$) для каждой частотной компоненты f_m.

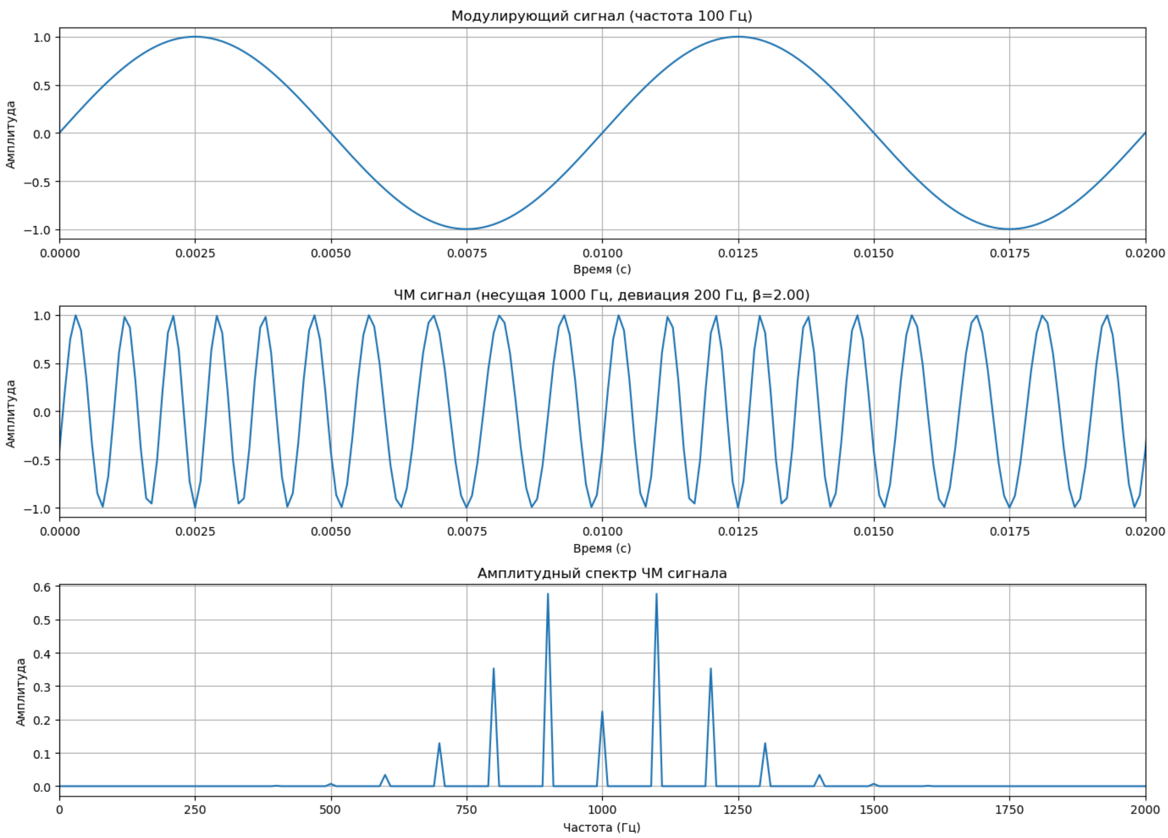


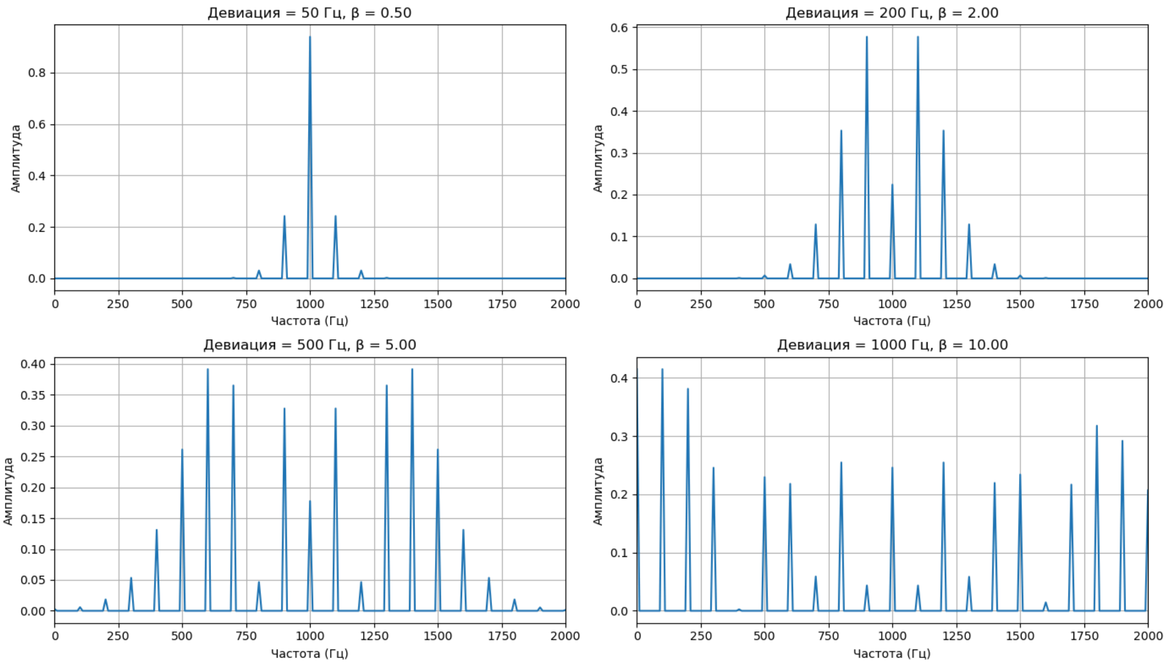
4.2 Частотная модуляция (ЧМ)

Принцип: Мгновенная частота несущей меняется пропорционально модулирующему сигналу.

ЧМ-сигнал: $s_{FM}(t) = A_0 \cos\left[2\pi \int (f_0 + \Delta f \cdot m(t))dt\right]$

Спектр ЧМ значительно сложнее. При малых индексах модуляции (отношении $\Delta f / f_m$) спектр похож на АМ, но с подавленной несущей. При больших — ширина полосы определяется по правилу Карсона: $B_{FM} \approx 2(\Delta f + f_m)$, где Δf — девиация частоты, f_m — максимальная частота модуляции.

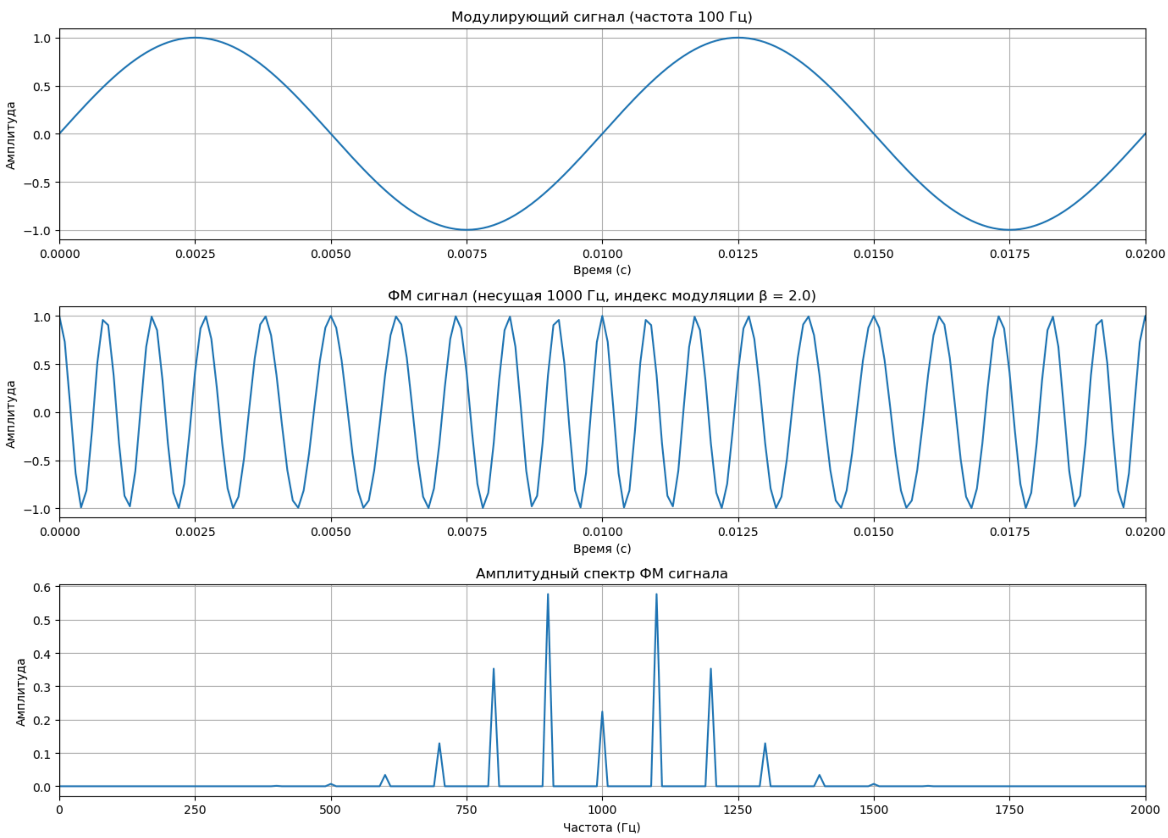


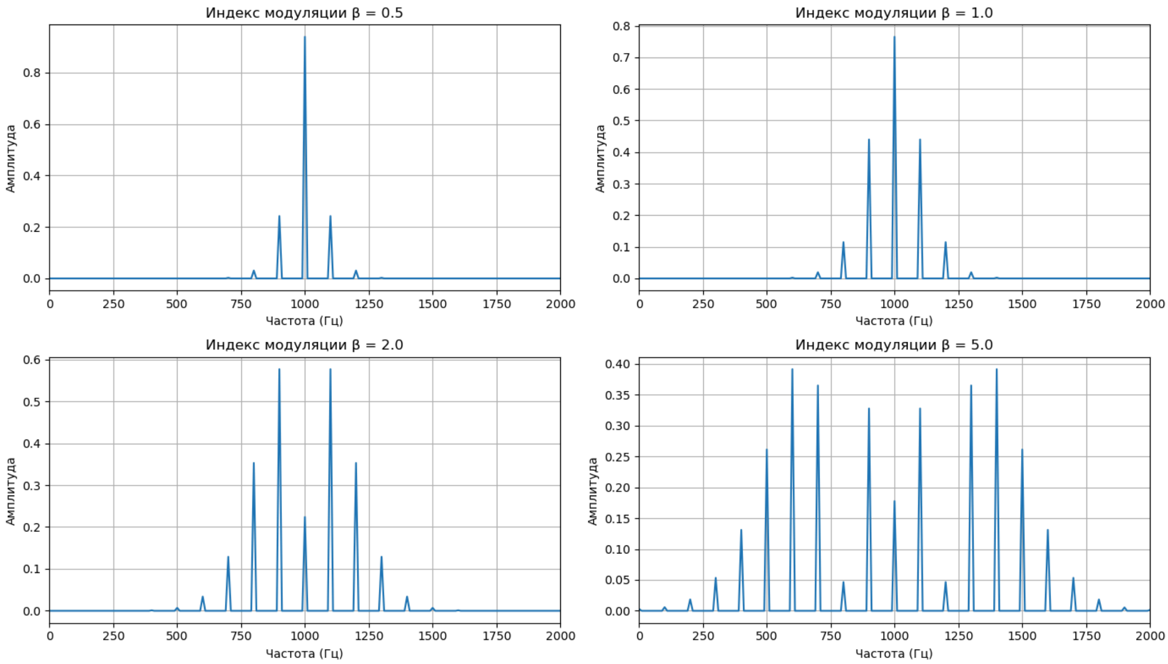


4.3 Фазовая модуляция (ФМ)

Принцип: Фаза несущей меняется пропорционально модулирующему сигналу.

ФМ-сигнал: $s_{PM}(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + k_p m(t))$





4.4 Преимущества и недостатки

Вид модуляции	Преимущества	Недостатки
Амплитудная (АМ)	1. Простота реализации и декодирования 2. Широкое применение в радиовещании 3. Узкая полоса частот	1. Низкая помехоустойчивость 2. Чувствительность к шумам 3. Низкая эффективность использования мощности передатчика
Частотная (ЧМ)	1. Высокая помехоустойчивость 2. Лучшее качество звука 3. Большая дальность передачи	1. Сложность реализации 2. Широкая полоса частот 3. Чувствительность к нестабильности частоты
Фазовая (ФМ)	1. Высокая помехоустойчивость 2. Хорошая пропускная способность 3. Независимость от амплитудных помех	1. Сложность реализации и декодирования 2. Чувствительность к скачкам фазы 3. Ограниченное применение в аналоговой технике

4.5 Помехоустойчивость различных видов модуляции

По степени устойчивости к помехам методы модуляции располагаются следующим образом :

АМ < ЧМ < ФМ

Чем сильнее отличаются сигналы, соответствующие разным символам (логическому 0 и 1), тем выше помехоустойчивость. При фазовой модуляции сигналы противоположны (сдвиг на 180°), что обеспечивает максимальную различимость .

4.6 Области применения

Область применения	Используемые виды модуляции	Причина выбора
Длинно- и средневолновое радиовещание	АМ	Простота, покрытие больших территорий
УКВ радиовещание (FM-диапазон)	ЧМ	Высокое качество звука, помехоустойчивость
Телевизионное вещание	АМ (видео), ЧМ (звук)	Компромисс качества и полосы
Спутниковая связь	Квадратурные методы (запись нескольких сигналов в одну полосу) QPSK, 8-PSK, QAM	Эффективность использования мощности
Сотовая связь (2G-5G)	GMSK (разновидность ЧМ), QPSK, QAM	Баланс скорости и помехоустойчивости
Цифровое телевидение	QAM, COFDM	Высокая скорость передачи
Модемы для телефонных линий	QAM, TCM	Максимальная скорость в ограниченной полосе

5. Быстрое преобразование Фурье (БПФ)

5.1 Проблема ДПФ

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, \ldots, N-1$$

Прямое вычисление ДПФ по формуле требует N^2 комплексных умножений и сложений.

Например, 3-минутный аудиотрек с $f_s = 44{,}1$ кГц содержит около 8×10^6 отсчётов, для его Фурье-преобразования потребуется порядка 10^{14} операций, это около суток при 10^9 операций в секунду.

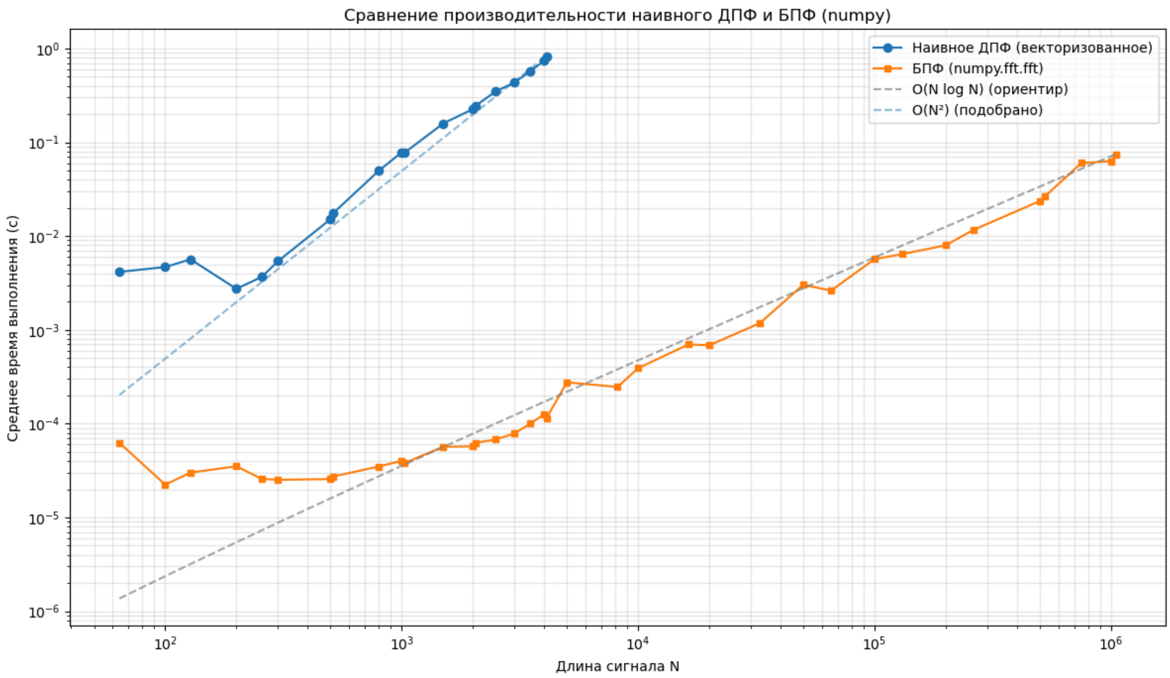
5.2 Идея БПФ

Алгоритм Кули — Тьюки (1965) использует принцип "разделяй и властвуй", разбивая последовательность на чётные и нечётные отсчёты и рекурсивно вычисляя ДПФ меньшего размера. Вычислительная сложность снижается до $N \log_2 N$.

- Особенно быстро работает для N кратных 2
- Для $N = 1024$ ускорение примерно в 100 раз.

5.3 Реализация в Python

В `numpy.fft` используется именно БПФ



6. Другие ортогональные преобразования

6.1 Дискретное косинусное преобразование (ДКП)

- Базис — косинусы

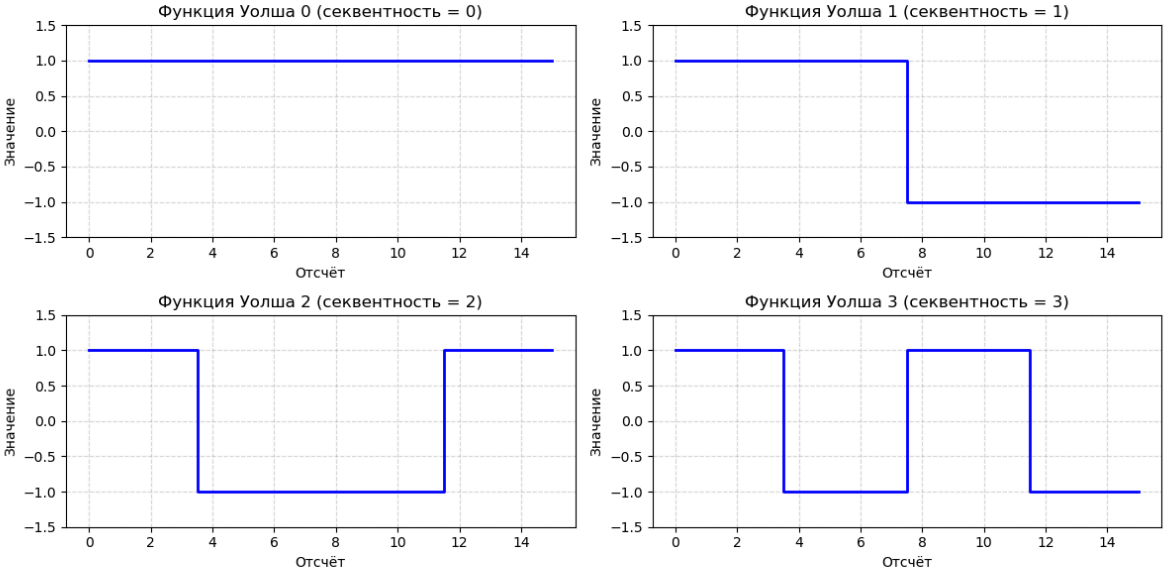
- Отличия от комплексного преобразования Фурье:
  - Работает быстрее (вычисляется только вещественная часть)
  - Содержит информацию только об амплитудах, но не фазах

- Используется в JPEG (ДКП 8x8 блоков), MPEG, MP3 (модифицированное ДКП).

- В Python: `from scipy.fftpack import dct`

6.2 Преобразование Уолша — Адамара

- Базис — периодические прямоугольные функции (значения ±1).



- Преимущества:
  - Быстрота (только сложения и вычитания)
  - Естественная функция для 1-битных сигналов

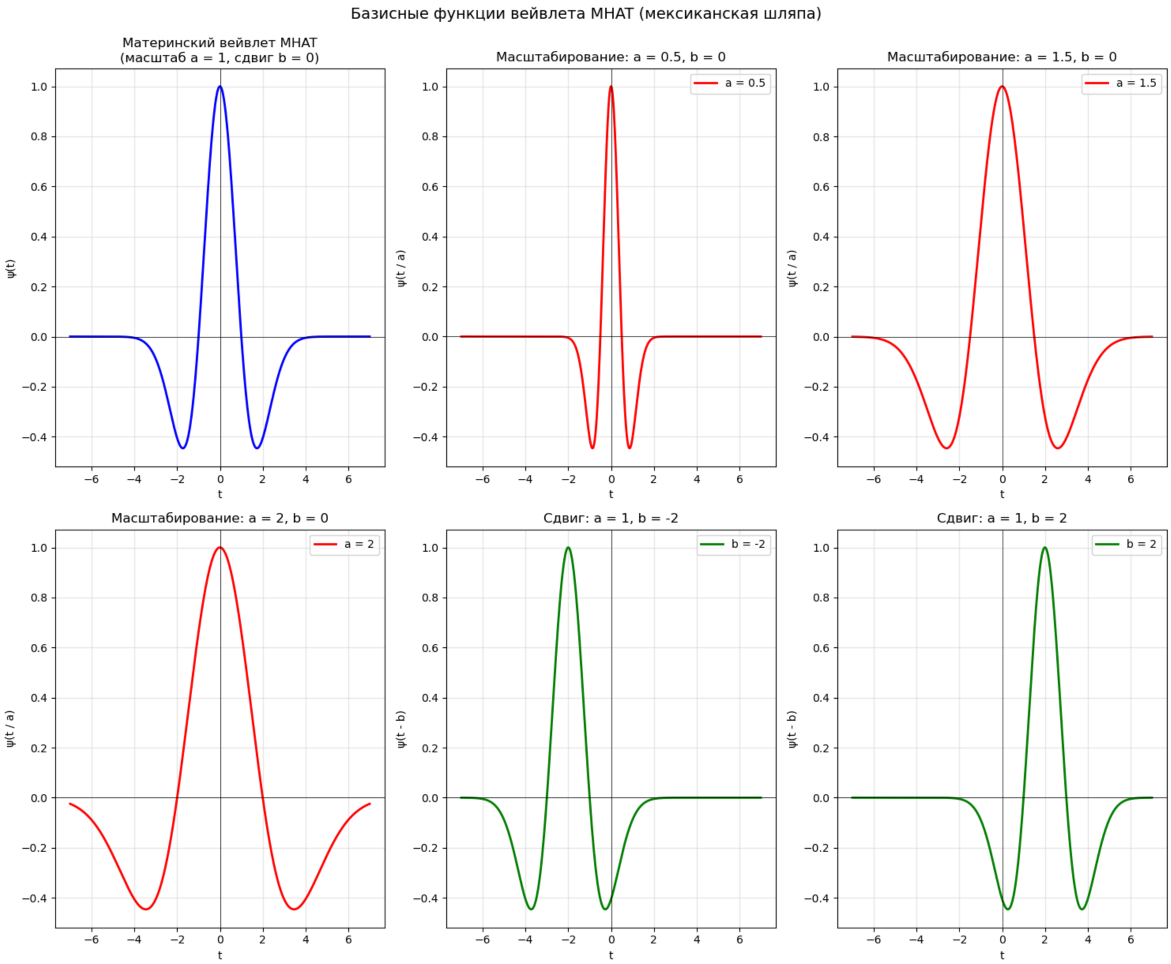
- Недостатки:
  - Широкий спектр (Фурье от прямоугольника — $sin(k)/k$)
  - Коэффициенты — это не частоты, сложно интерпретировать

- Используется в CDMA (мобильная связь), сжатии изображений (битовые плоскости), криптографии.

- Реализовано в `scipy.linalg.hadamard` и `scipy.fftpack.walsh_hadamard`.

6.3 Вейвлет-преобразование

- Даёт одновременно частотно-временное представление.
- Будет подробно рассмотрено позже.
- В Python: `scipy.signal.cwt`, `pywt` (PyWavelets).



7. Домашнее задание

Задача 1. Спектр суммы гармоник

Дан сигнал:

$$s(t) = 2\cos(2\pi \cdot 100t) + 3\cos\left(2\pi \cdot 250t + \frac{\pi}{3}\right).$$

1. Изобразите качественно (от руки) амплитудный спектр этого сигнала. Укажите на графике значения частот (в Гц) и амплитуд.
2. Как изменится амплитудный спектр, если фазу второго колебания изменить на $\pi/2$?

Задача 2. Ширина спектра ЧМ-сигнала

Несущая частота $f_c = 100$ МГц модулируется чистым тоном частоты $f_m = 5$ кГц с девиацией частоты $\Delta f = 50$ кГц.

1. Вычислите индекс частотной модуляции β.
2. Используя **правило Карсона**, оцените ширину спектра B ЧМ-сигнала.

3. Как изменится ширина спектра, если частоту модулирующего тона уменьшить в два раза ($f'_m = 2.5$ кГц), сохранив девиацию Δf неизменной?

Задача 3. Теорема о сдвиге во времени

Известно, что спектр сигнала $x(t)$ равен $X(f)$.

1. Запишите выражение для спектра сигнала $y(t) = x(t - t_0)$.
2. Как это свойство можно применить в импульсной радиолокации для определения расстояния до объекта?