

Лекция №4: Случайные сигналы (шумы) и их характеристики

1. Введение: детерминированные и случайные сигналы

Детерминированный сигнал – сигнал, значение которого в каждый момент времени предсказуемо (например, задано аналитической формулой, пример – синусоида).

Случайный сигнал – сигнал, значение которого в следующий момент времени непредсказуемо (в принципе или практически), то есть является случайной (или квазислучайной) величиной; можно описывать вероятностными характеристиками.

Примеры случайных сигналов:

- тепловой шум в электронике,
- шум квантования АЦП,
- флуктуации сигнала в канале связи.

Для описания случайных сигналов используют **статистические характеристики**:

- среднее значение,
- дисперсия,
- корреляционные функции,
- спектральная плотность мощности.

2. Основные определения случайного процесса

Случайный процесс – это множество функций времени (ансамбль реализаций), подчиняющихся общим статистическим закономерностям.

Выделяют **стационарные** случайные процессы – это случайные процессы, статистические свойства которых не меняются во времени.

2.1. Математическое ожидание (среднее по ансамблю)

$$\mu_x(t) = \mathbb{E}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x, t) dx$$

Для стационарного процесса $\mu_x(t) = \text{const}$.

2.2. Дисперсия

$$\mathbb{D}[x(t)] = \sigma_x^2 = \mathbb{E}[(x(t) - \mu_x)^2]$$

σ_x – среднеквадратическое отклонение.

2.3. Автокорреляционная функция (АКФ)

$$R_x(t_1, t_2) = \mathbb{E}[x(t_1)x(t_2)]$$

Для **стационарного в широком смысле** процесса АКФ зависит только от разности $\tau = t_2 - t_1$:

$$R_x(\tau) = \mathbb{E}[x(t)x(t + \tau)]$$

2.4. Эргодичность

Как на практике выполнять усреднение по ансамблю?

Строго говоря, нужны параллельные Вселенные.

Но часто мы имеем дело с процессами, которые являются **эргодическими**: их реализации практически не зависят от начала отсчёта времени.

Если процесс эргодический, то среднее по ансамблю можно заменить средним по времени:

$$\mu_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t + \tau) dt$$

Это позволяет оценивать характеристики по одной достаточно длинной реализации.

3. Спектральная плотность мощности (СПМ)

3.1 Энергия сигнала

Для сигнала $x(t)$ **энергией** на интервале $(-T, T)$ называют:

$$E_T = \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$$

Если сигнал конечный (финитный) или быстро затухает, то можно ввести также **полную энергию**:

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} E_T = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

3.2 Мощность сигнала

Усреднённую по времени энергию называют **мощностью**:

$$P_T = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$$

Мощность можно использовать и для бесконечных во времени сигналов

Мгновенную мощность называют также **интенсивностью** сигнала:

$$I = \lim_{T \rightarrow 0} P_T = |x(t)|^2$$

3.3. Теорема Парсеваля

Для сигнала $x(t)$ и его преобразования Фурье

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

справедлива связь:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

Доказательство (для вещественного $x(t)$)

1. Запишем энергию через обратное преобразование:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \right] dt$$

2. Меняем порядок интегрирования:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j2\pi ft} dt \right] df$$

3. Внутренний интеграл — это $X(-f)$. Если $x(t)$ вещественный, то $X(-f) = X^*(f)$. Получаем:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) X^*(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

Что и требовалось доказать.

3.4. Спектральная мощность детерминированного сигнала

Спектральная плотность энергии:

$$\psi_x(f) = |X(f)|^2$$

• **Свойства:**

- Вещественная, неотрицательная.
- Энергия сигнала: $E = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_x(f) df$.

Таким образом, $\psi_x(f)$ — распределение энергии сигнала по частоте.

Тогда для финитных или быстро затухающих сигналов **спектральная мощность сигнала:**

$$S_x(f) = \frac{1}{2T} \psi_x(f) = \frac{1}{2T} |X(f)|^2$$

3.5. Спектральная мощность случайного сигнала

Пусть $x_T(t) = x(t) \cdot \text{rect}(t/(2T))$ и $X_T(f)$ — его Фурье-преобразование.

Тогда спектральная плотность мощности:

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \mathbb{E} \left[|X_T(f)|^2 \right]$$

• **Свойства:**

- Неотрицательна: $S_x(f) \geq 0$.
- Мощность сигнала:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df$$

- Сохраняет информацию об амплитуде Фурье-компонент, но не об их фазах.

4. Теорема Винера – Хинчина

Для стационарного в широком смысле случайного процесса автокорреляционная функция и спектральная плотность мощности связаны преобразованием Фурье.

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

Для дискретных сигналов:

$$S_x(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_x[m] e^{-j2\pi f m}$$

$$R_x[m] = \int_{-\pi}^{\pi} S_x(f) e^{j2\pi f m} df$$

Доказательство (основные этапы).

1. Усечённый сигнал

Рассмотрим реализацию процесса на интервале $(-T, T)$:

$$x_T(t) = x(t) \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)$$

и её преобразование Фурье:

$$X_T(f) = \int_{-T}^T x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

2. Спектральная плотность мощности по определению

Для стационарного процесса (и эргодического по корреляции) СПМ задаётся как:

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \mathbb{E} \left[|X_T(f)|^2 \right]$$

3. Распишем математическое ожидание

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[|X_T(f)|^2 \right] &= \mathbb{E} \left[X_T(f) \cdot X_T^*(f) \right] = \\ &= \mathbb{E} \left[\int_{-T}^T x(t_1) e^{-j2\pi f t_1} dt_1 \int_{-T}^T x(t_2) e^{j2\pi f t_2} dt_2 \right] = \\ &= \mathbb{E} \left[\int_{-T}^T \int_{-T}^T x(t_1) x(t_2) e^{-j2\pi f (t_1 - t_2)} dt_1 dt_2 \right] \end{aligned}$$

Меняем порядок интегрирования и математического ожидания:

$$= \int_{-T}^T \int_{-T}^T \underbrace{\mathbb{E}[x(t_1)x(t_2)]}_{=R_x(t_1-t_2)} e^{-j2\pi f (t_1-t_2)} dt_1 dt_2$$

4. Замена переменных

Пусть $\tau = t_1 - t_2$, $t = t_2$. Область интегрирования: $|\tau| \leq 2T$, $|t| \leq T$ с ограничениями. После замены и упрощения:

$$\mathbb{E} \left[|X_T(f)|^2 \right] = \int_{-2T}^{2T} R_x(\tau) (2T - |\tau|) e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

5. Предельный переход

$$\begin{aligned} S_x(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} R_x(\tau) (2T - |\tau|) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-2T}^{2T} R_x(\tau) \left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \end{aligned}$$

При $T \rightarrow \infty$ множитель $\left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) \rightarrow 1$ для любого конечного τ . Если $R_x(\tau)$ абсолютно интегрируема (или убывает достаточно быстро), то можно внести предел под интеграл:

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Что и требовалось доказать.

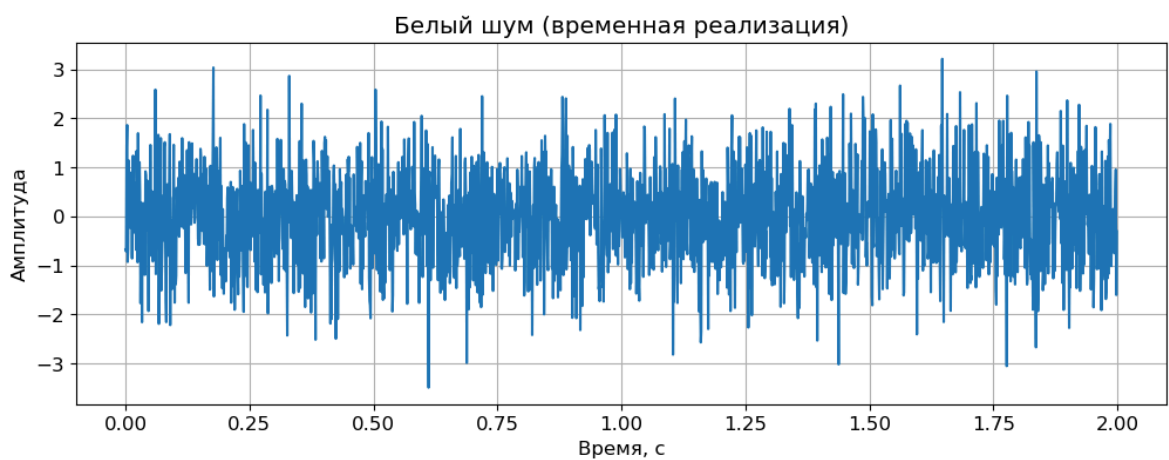
5. Модели шумов

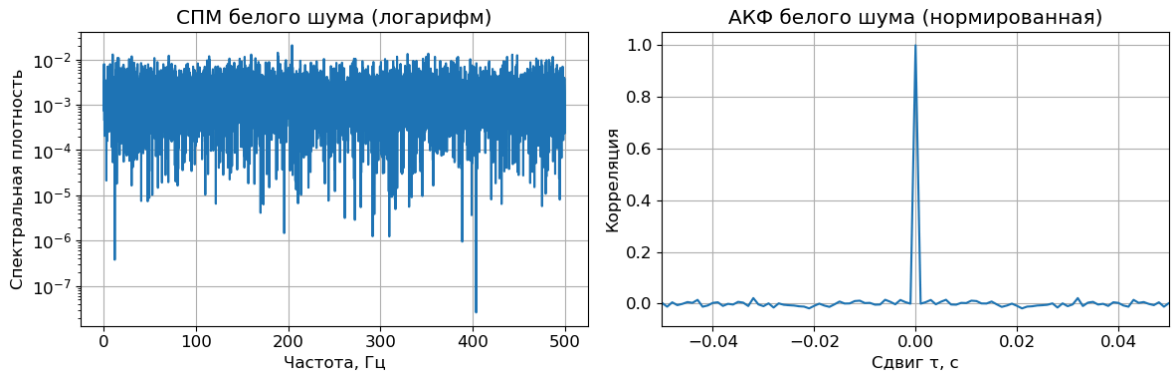
5.1. Белый шум

Свойства:

- СПМ постоянна: $S(f) = N_0$
- АКФ — дельта-функция: $R(\tau) = N_0\delta(\tau)$
- Отсчёты некоррелированы

Физические источники: тепловой шум в электронике, дробовой шум, квантовый шум.



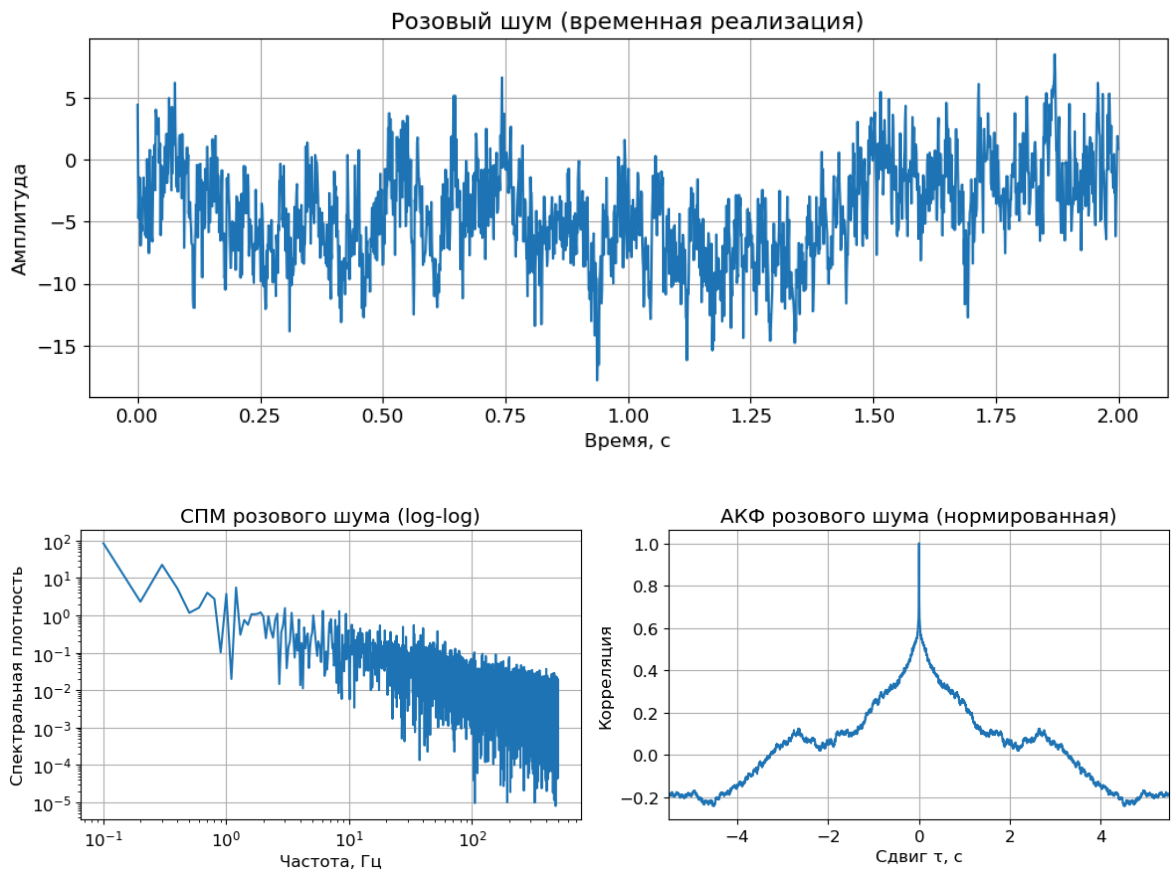


5.2. Розовый шум (фликкер-шум, $1/f$ шум)

Свойства:

- СПМ: $S(f) \propto 1/f^\alpha$, $\alpha \approx 1$
- АКФ спадает медленно (степенной закон)
- Одинаковая энергия в каждой октаве

Физические источники: флуктуации сопротивления, шум в полевых транзисторах, биологические сигналы.



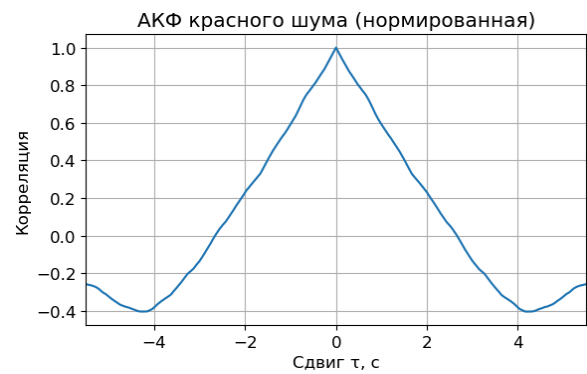
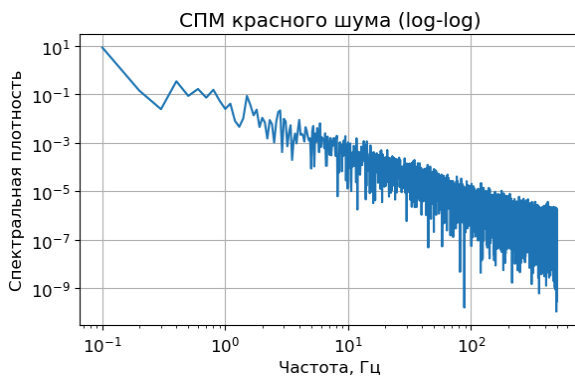
5.3. Красный (броуновский, коричневый) шум

Свойства:

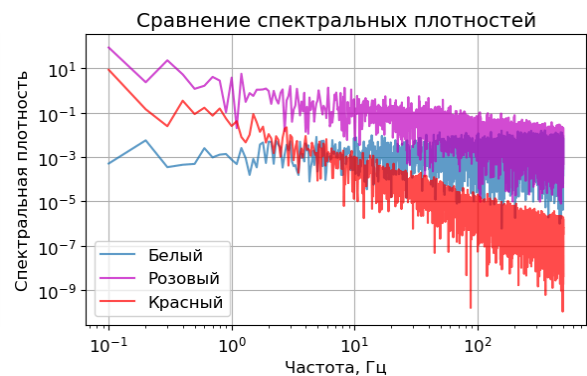
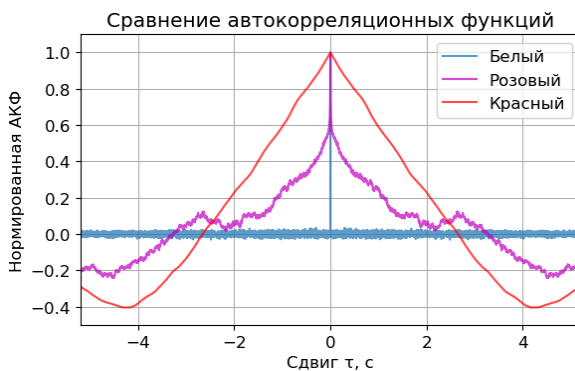
- СПМ: $S(f) \propto 1/f^2$

- Получается интегрированием белого шума (винеровский процесс) — случайные отклонения от предыдущего значения
- АКФ имеет треугольную форму (для конечного интервала) или линейный спад

Физические источники: броуновское движение частиц, случайные блуждания, фазовый шум генераторов, финансовые временные ряды.



5.4. Сравнение всех трёх шумов на одном графике



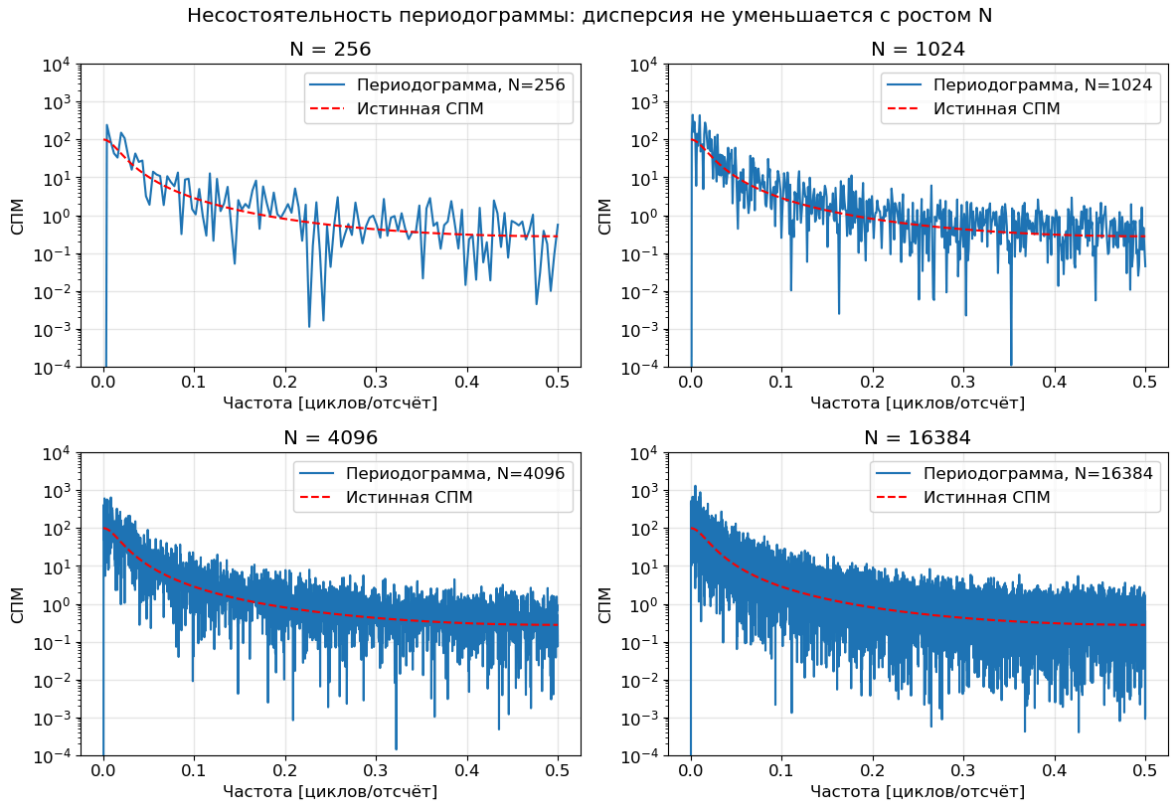
6. Оценка СПМ по реализации конечной длины

6.1. Метод периодограмм

Определение: для последовательности $x[0], \dots, x[N - 1]$ периодограмма вычисляется как

$$\hat{P}_{xx}(f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi fn} \right|^2$$

Проблема: оценка **несостоятельна** – её дисперсия не стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Увеличение длины выборки приводит к более «рваной» кривой, а не к сглаживанию.



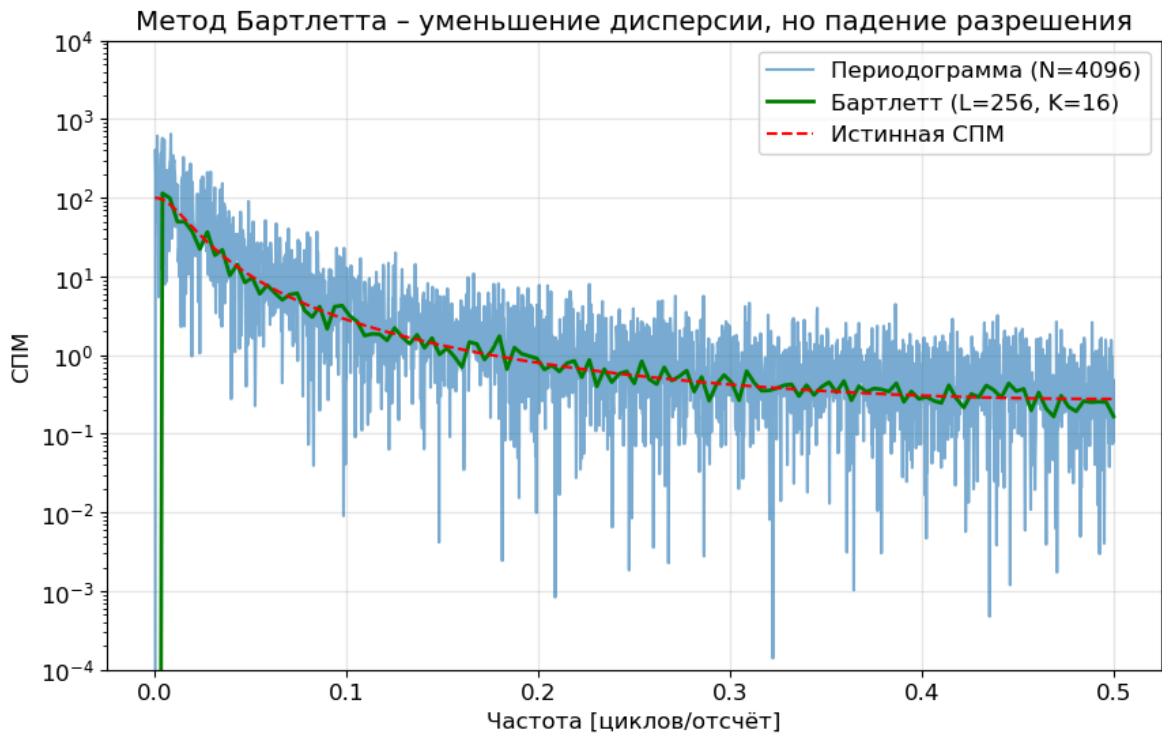
6.2. Метод Бартлетта (Bartlett's method)

Идея: разбить сигнал на K неперекрывающихся сегментов длины $L = N/K$, вычислить периодограмму для каждого сегмента и усреднить их.

$$\hat{P}_{Bart}(f) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \hat{P}_{xx}^{(k)}(f)$$

Свойства:

- Дисперсия уменьшается в K раз (по сравнению с периодограммой)
- Разрешение по частоте ухудшается в K раз (длина сегмента L вместо N)



Результат: оценка Бартлетта значительно глаже, но спектральные пики расширились – разрешение ухудшилось.

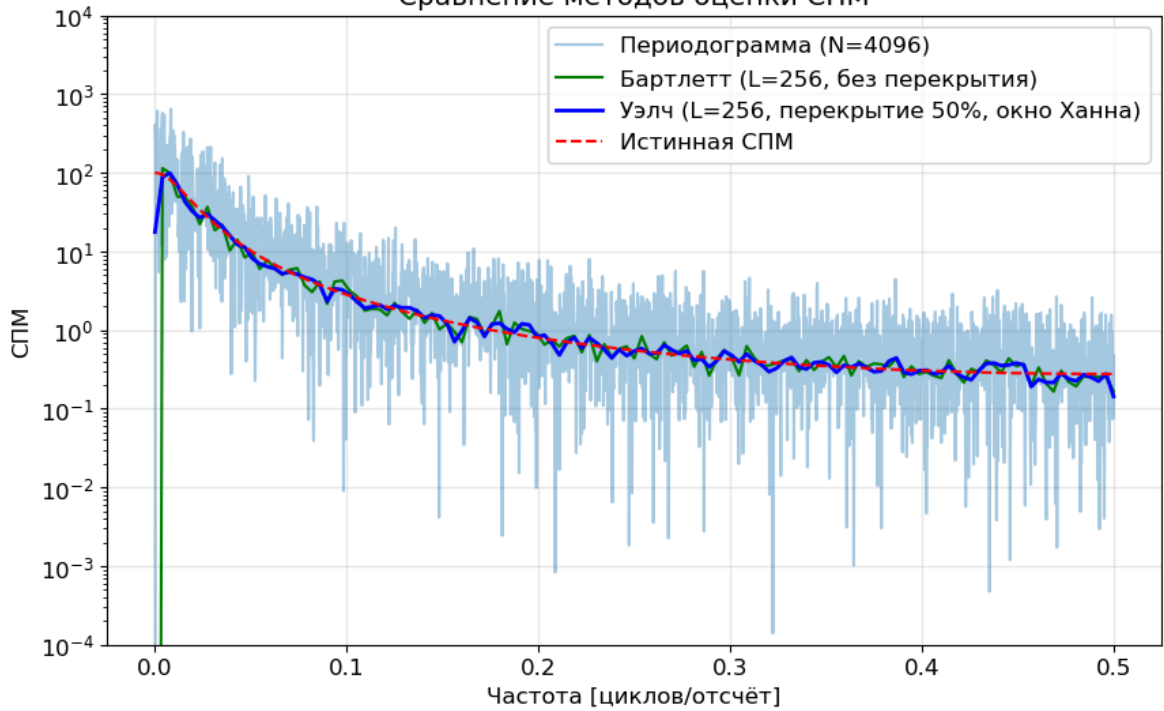
6.3. Метод Уэлча (Welch's method)

Улучшения по сравнению с Бартлеттом:

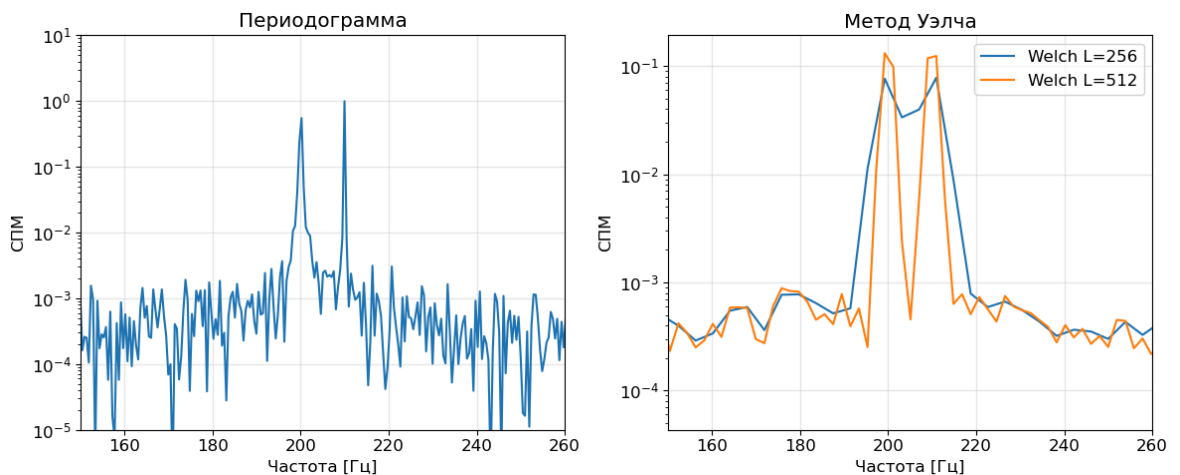
- **Перекрывающиеся сегменты** (обычно 50% или 75% перекрытия) – позволяет или увеличить количество сегментов, или их длину.
- Сглаженные **оконные функции** (Ханна, Хэмминга и др.) – уменьшает краевые эффекты.

Преимущества: хорошее сглаживание, гибкий контроль разрешения/дисперсии.

Сравнение методов оценки СПМ



Пример с двумя близкими синусоидами



Вывод: метод Уэлча даёт ещё более гладкую оценку, чем Бартлетт, за счёт перекрытия и оконной обработки, при этом сохраняя разумное разрешение.

7. Роль СПМ в обработке сигналов

- **Анализ шумов** в электронике: определение частотных составляющих помех.
- **Обнаружение сигналов** на фоне шума: если спектр сигнала известен, можно использовать согласованную фильтрацию.
- **Фильтрация Винера** – оптимальный фильтр для восстановления сигнала по известным СПМ сигнала и шума.
- **Спектральный анализ** в геофизике (сейсмика), медицине (ЭЭГ, ЭКГ), астрономии.