

Лекция №6: Синтез цифровых фильтров

1. Введение в синтез фильтров

Задача синтеза

По заданным требованиям к частотным характеристикам (полоса пропускания, полоса заграждения, максимальные пульсации, крутизна среза) получить коэффициенты фильтра, реализуемого в виде разностного уравнения.

Этапы

1. Спецификация (желаемая АЧХ).
2. Выбор метода синтеза.
3. Расчёт коэффициентов.
4. Анализ (АЧХ, ФЧХ, групповая задержка, полюса-нули).
5. Реализация (фильтрация сигнала).

2. Синтез КИХ-фильтров – метод окон

2.1. Идея

1. Взять **идеальную** импульсную характеристику (для ФНЧ – функция sinc).
2. Обрезать её до конечной длины M (прямоугольное окно).
3. Применить **оконную функцию** для уменьшения эффекта Гиббса.

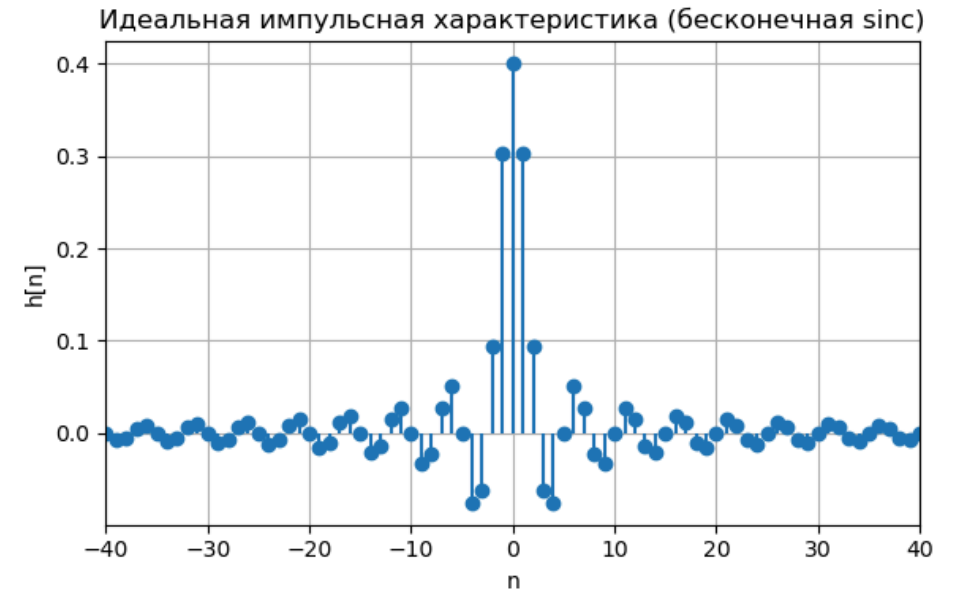
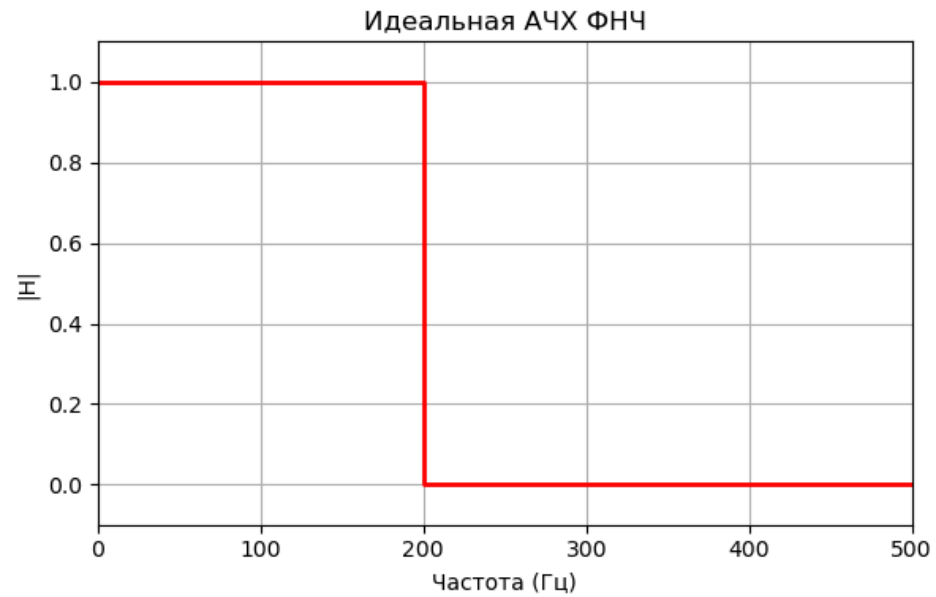
2.2. Идеальный ФНЧ и его импульсная характеристика

Идеальный ФНЧ имеет прямоугольную АЧХ:

$$H_{\text{ид}}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

Его импульсная характеристика – бесконечная sinc-функция:

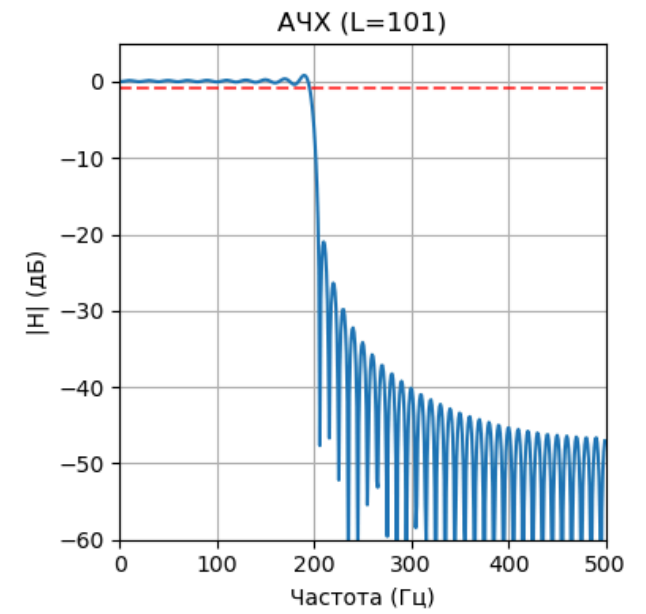
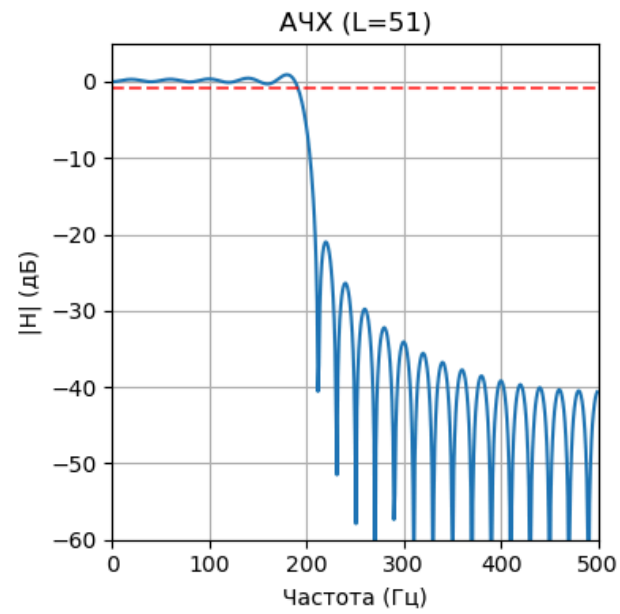
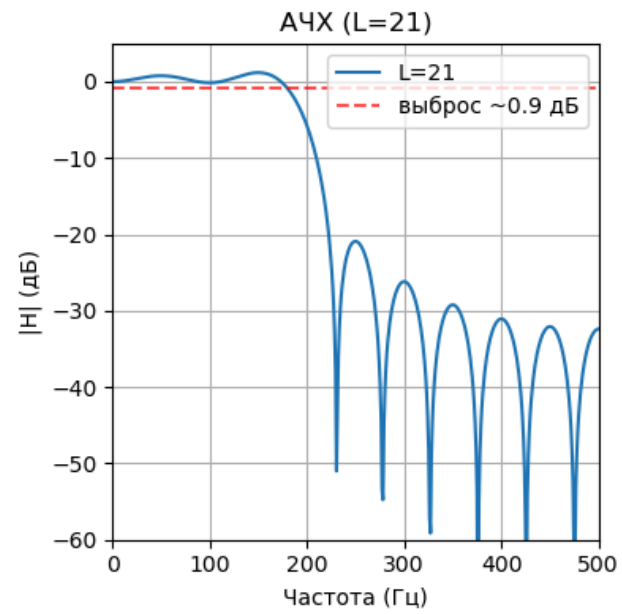
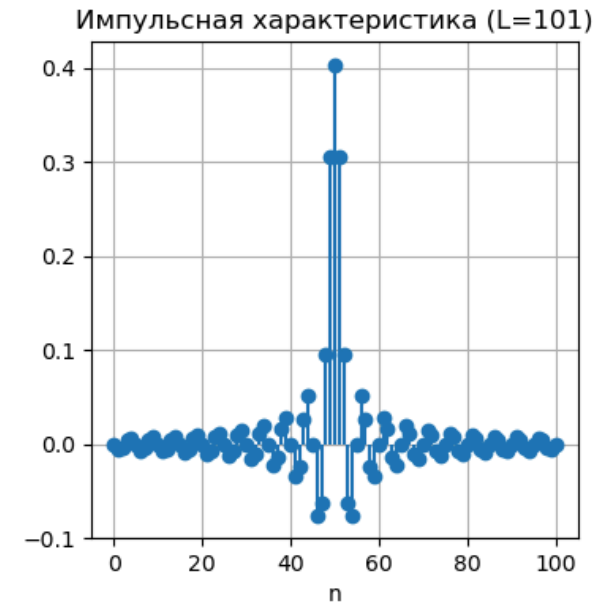
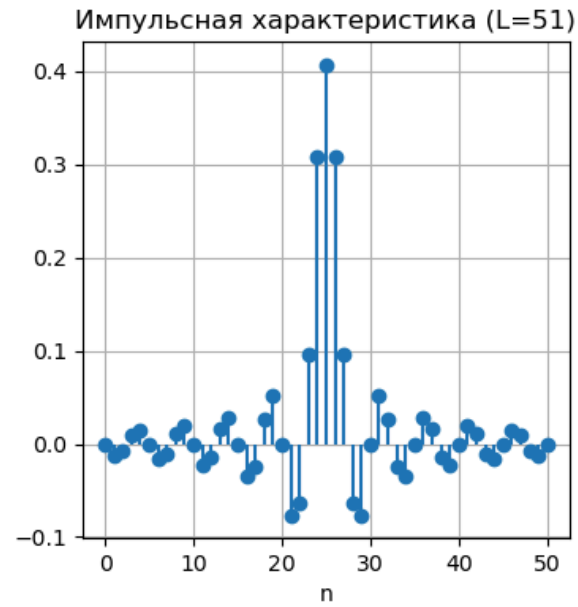
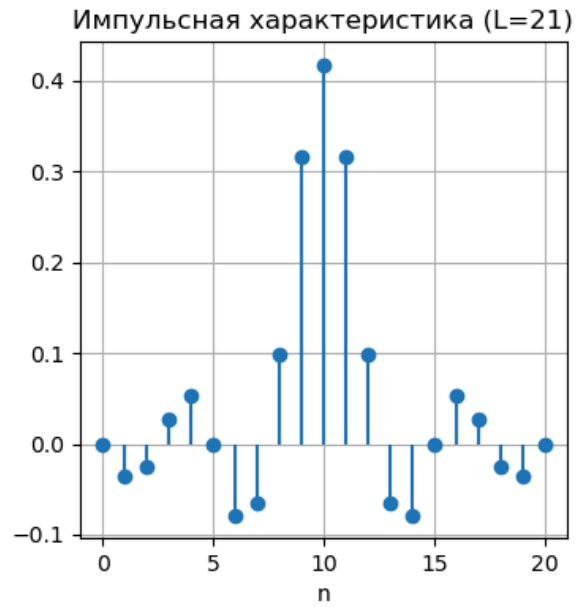
$$h_{\text{ид}}[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



2.3. Усечение прямоугольным окном – эффект Гиббса

Для получения КИХ-фильтра мы обрезаем $h_{ид}[n]$ до конечной длины L (прямоугольное окно). В частотной области это приводит к осцилляциям – **эффекту Гиббса**.

Амплитуда первого выброса не зависит от L и составляет $\approx 9\%$ (≈ 0.9 дБ).



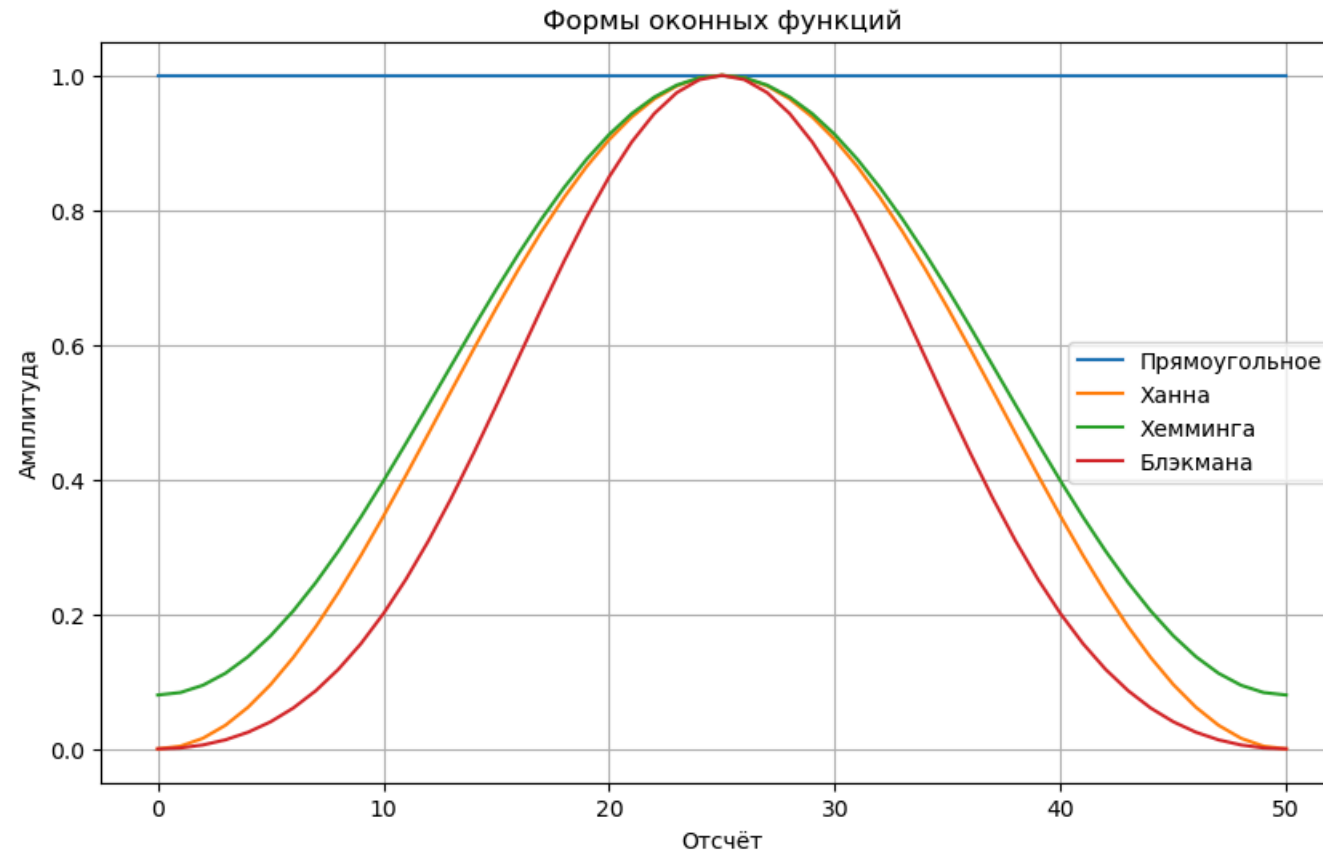
Вывод: Увеличение L сужает переходную полосу, но амплитуда пульсаций не уменьшается.

2.4. Сглаживание оконной функцией

Использование окон с плавным спаданием (Хемминга, Ханна, Блэкмана) подавляет пульсации Гиббса, но расширяет переходную полосу.

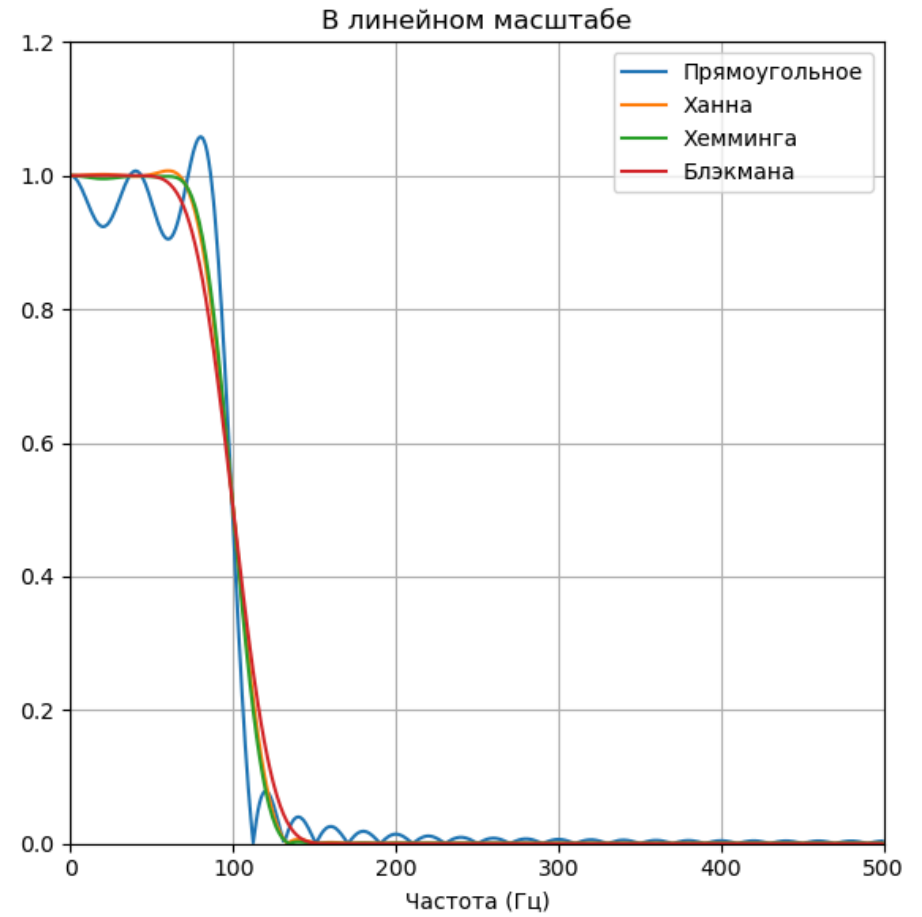
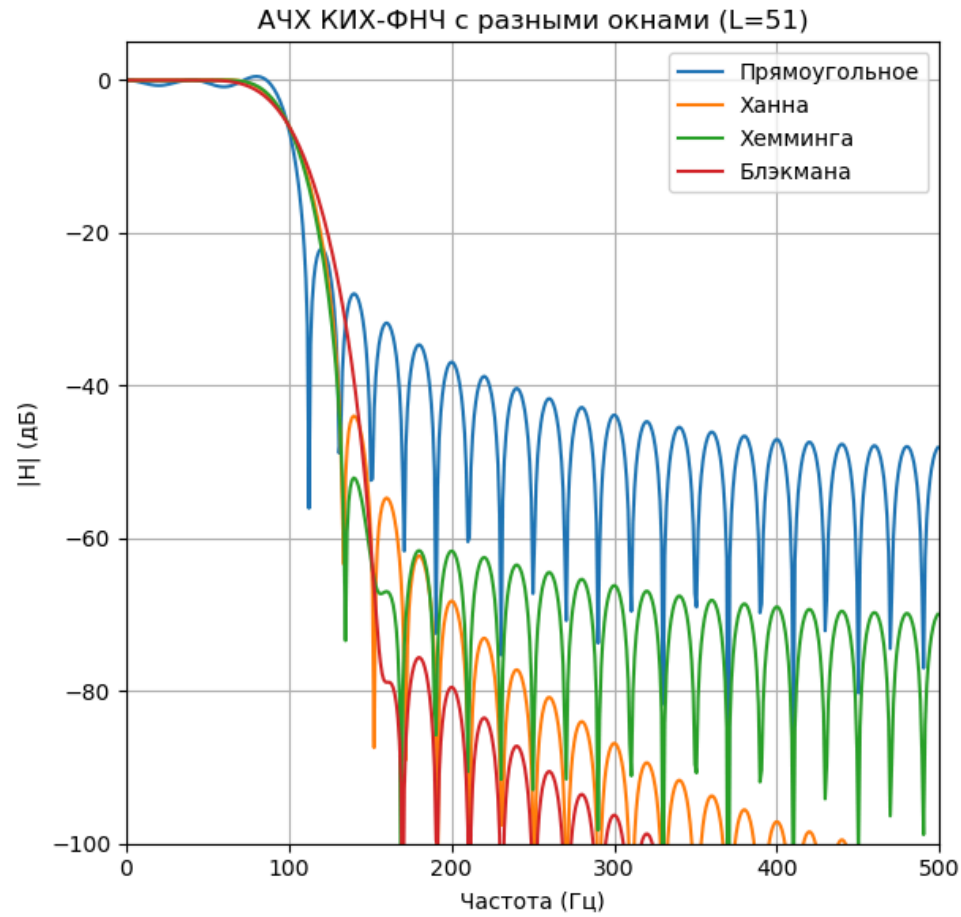
Основные оконные функции:

- Ханна (Hann)
- Хемминга (Hamming)
- Блэкмана (Blackman)



2.5. Сравнение различных окон

Выбор окна – компромисс между крутизной среза и уровнем подавления боковых лепестков.

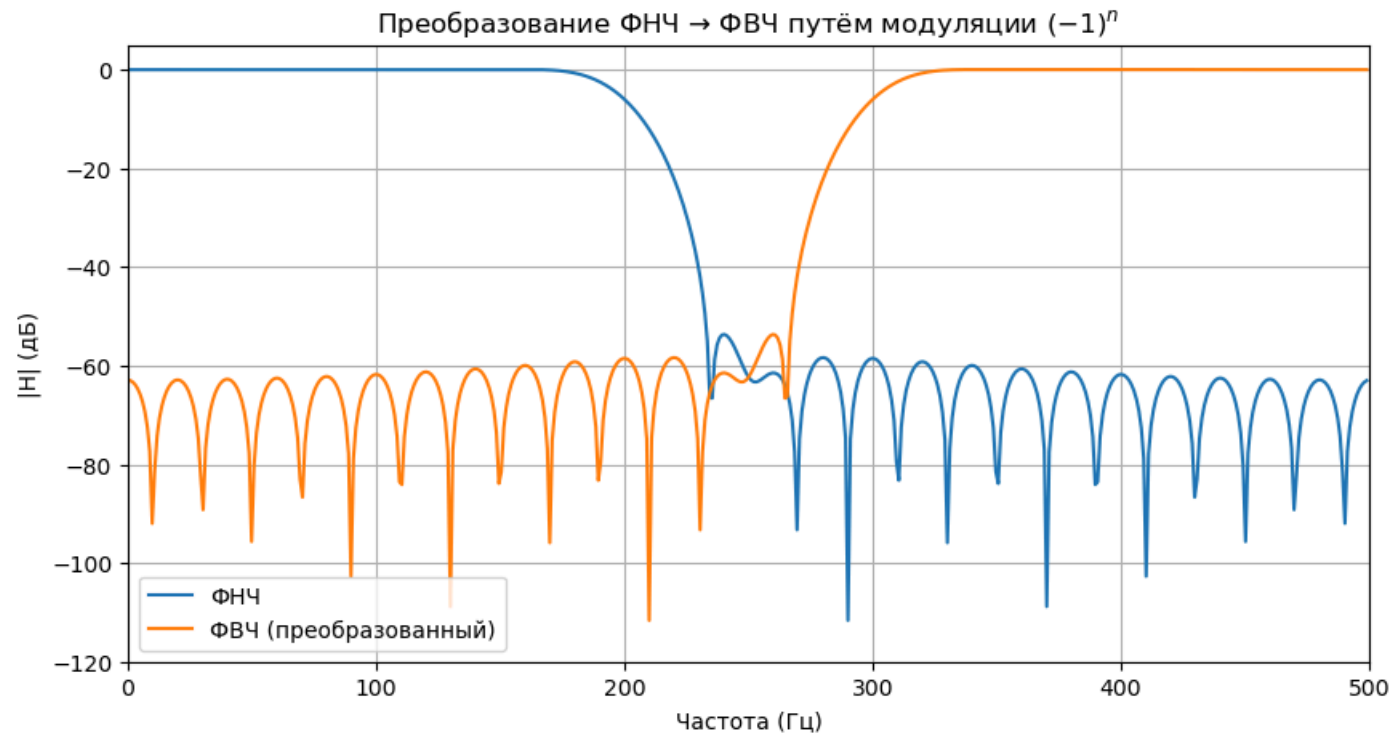


2.6. Из ФНЧ в ФВЧ – преобразование частоты

Имея коэффициенты ФНЧ $h_{LP}[n]$ длины N (с линейной фазой), можно получить **фильтр верхних частот** (ФВЧ) с той же частотой среза с помощью модуляции (сдвига спектра):

$$h_{HP}[n] = (-1)^n \cdot h_{LP}[n]$$

В частотной области это соответствует отражению АЧХ относительно частоты $f_s/4$ (или $\omega = \pi/2$). Для нормированной частоты: $h_{HP}[n] = e^{j\pi n} h_{LP}[n] = (-1)^n h_{LP}[n]$.

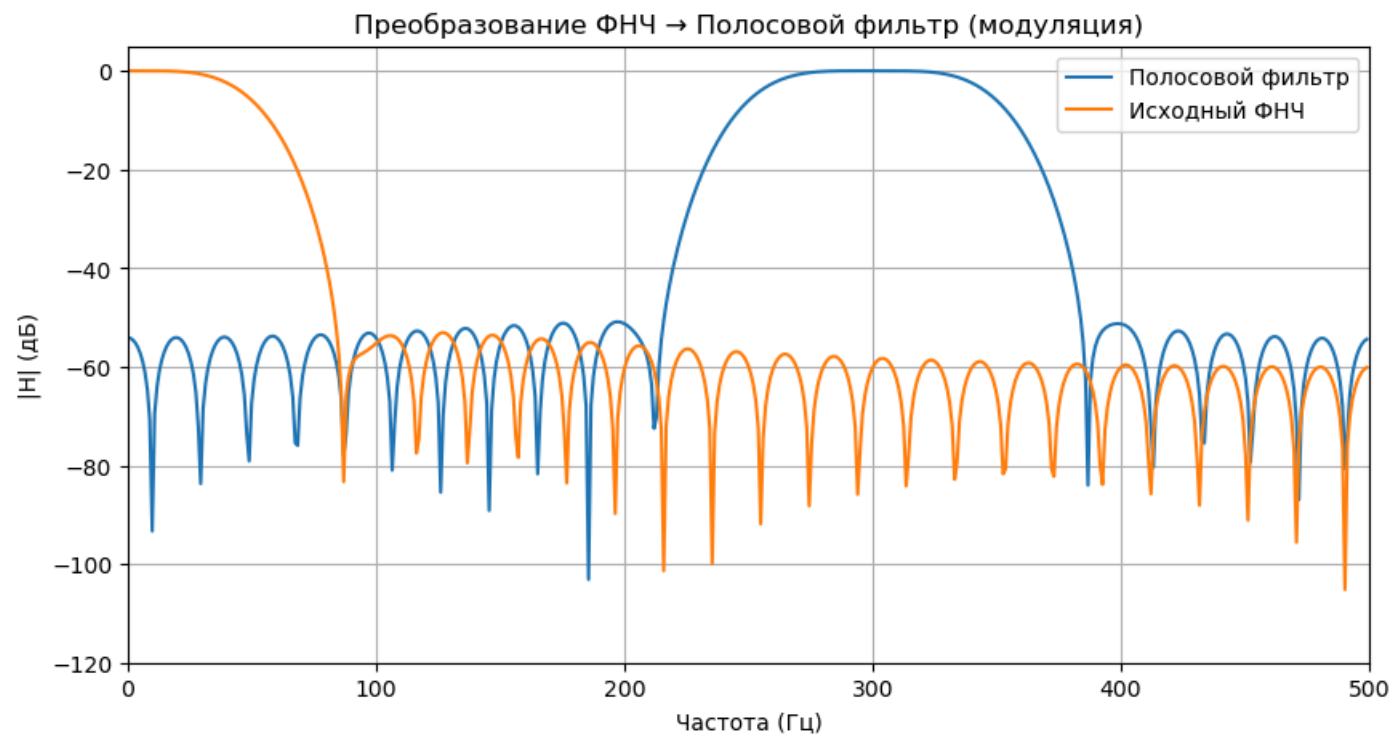


2.6. Из ФНЧ в полосовой фильтр

Для получения **полосового фильтра** из ФНЧ используется сдвиг спектра вправо и влево для формирования двух боковых полос. Коэффициенты полосового фильтра:

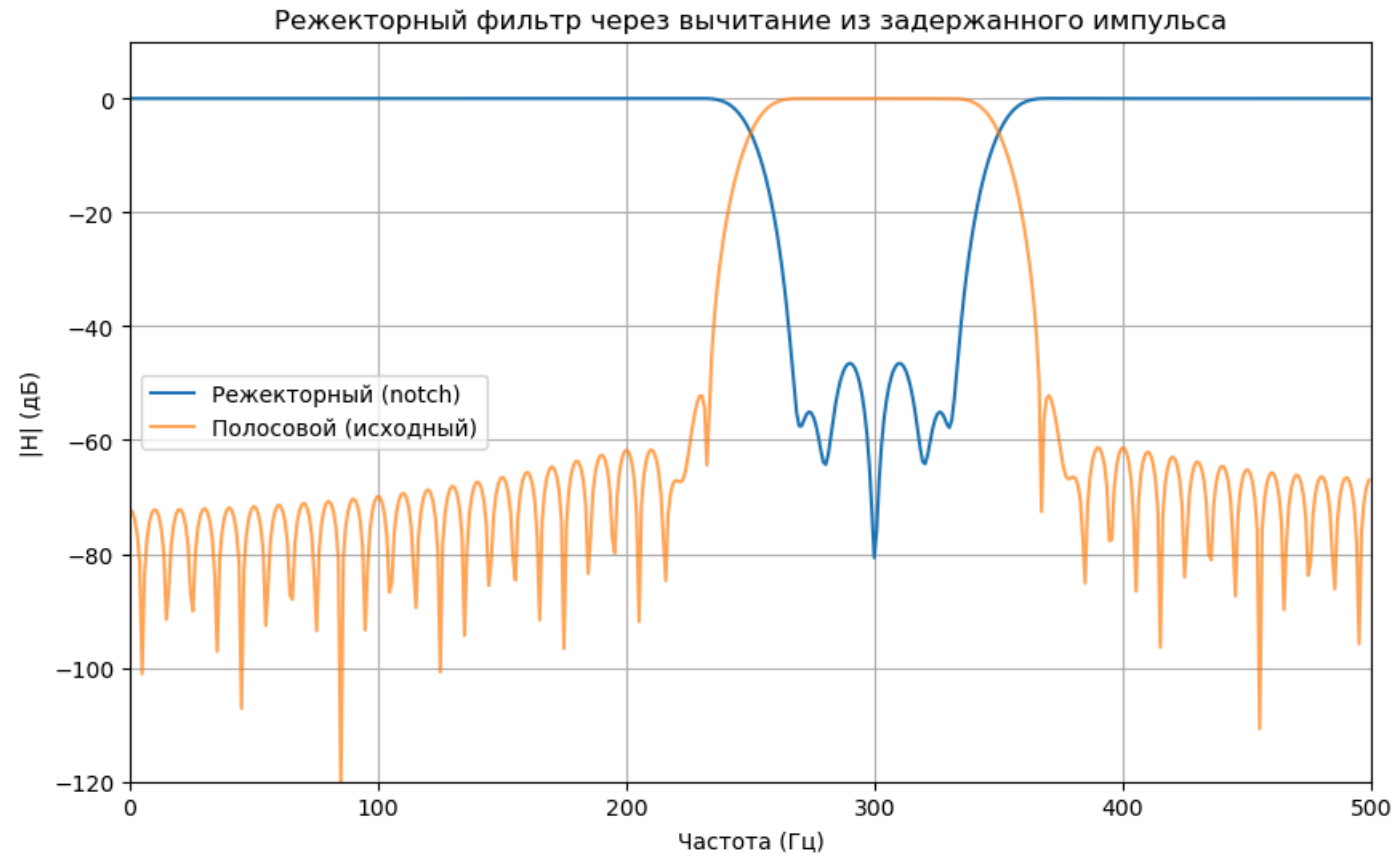
$$h_{\text{ВР}}[n] = 2 \cos(2\pi f_c n / f_s) \cdot h_{\text{ЛР}}[n]$$

где f_c – центральная частота полосы. Процесс эквивалентен модуляции ФНЧ на частоту f_c , что переносит его АЧХ из области нуля в область вокруг f_c . Ширина полосы пропускания определяется частотой среза исходного ФНЧ.



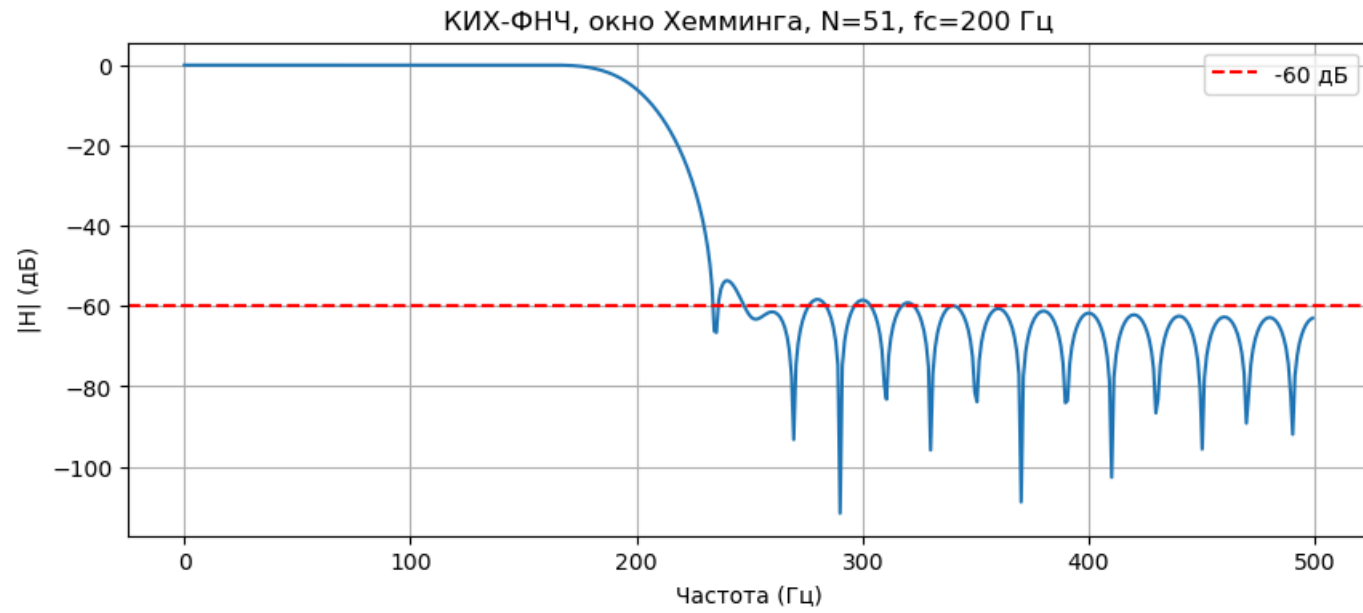
При необходимости можно также получить режекторный фильтр путём вычитания полосового фильтра из единицы или другой формулой:

$$h_{BS}[n] = \delta[n] - h_{BP}[n]$$



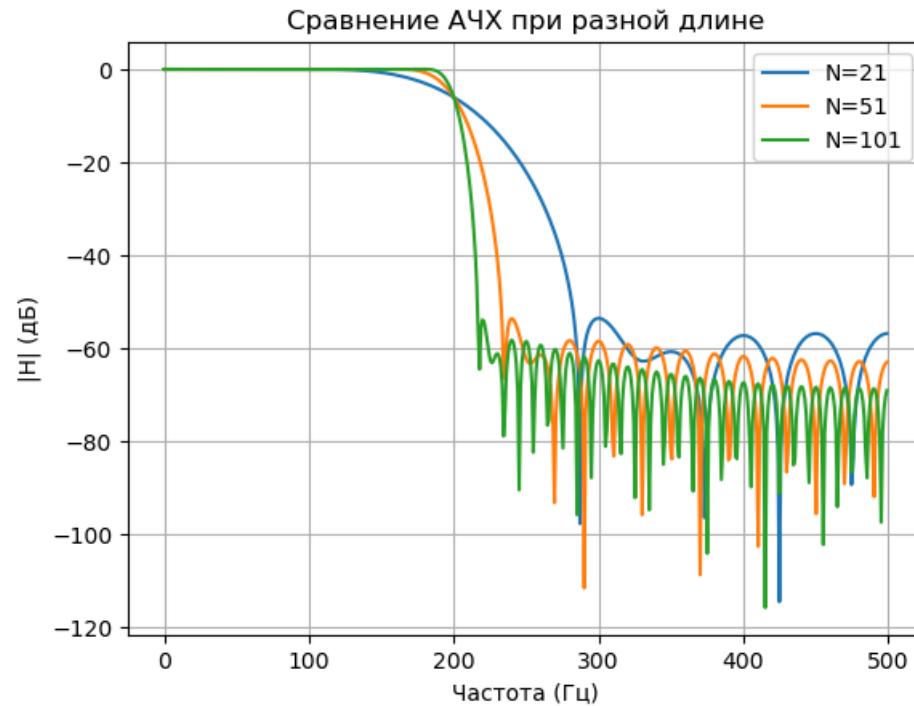
3. Проектирование КИХ-ФНЧ методом окон

Функция `scipy.signal.firwin` проектирует КИХ-фильтр методом окон.



Влияние длины фильтра:

- Большая длина → уже главный лепесток → круче переходная полоса.
- Но больше задержка и вычисления.



4. Метод частотной выборки (Frequency Sampling Method)

4.1. Идея метода

Принцип:

Желаемая частотная характеристика $H_{\text{des}}(e^{j\omega})$ задается в N равноотстоящих точках на единичной окружности:

$$H[k] = H_{\text{des}}(e^{j2\pi k/N}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Затем коэффициенты КИХ-фильтра вычисляются через обратное дискретное преобразование Фурье (ОДПФ):

$$h[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H[k] e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0, \dots, N-1$$

Геометрическая интерпретация:

Мы аппроксимируем идеальную АЧХ набором отсчетов в частотной области, а затем интерполируем между ними с помощью ДПФ.

Преимущества:

- Простота задания произвольной АЧХ (например, многополосные фильтры).
- Возможность точного воспроизведения нулей в заданных частотах.

Недостатки:

- Колебания (осцилляции) между точками выборки, особенно на разрывах.
- Для уменьшения пульсаций требуется вводить переходные отсчёты.

4.2. Алгоритм синтеза фильтра

1. **Выбрать длину фильтра** N (нечётное).

2. **Задать желаемую АЧХ** $A_{ид}(e^{j\omega})$ в N точках от 0 до 2π :

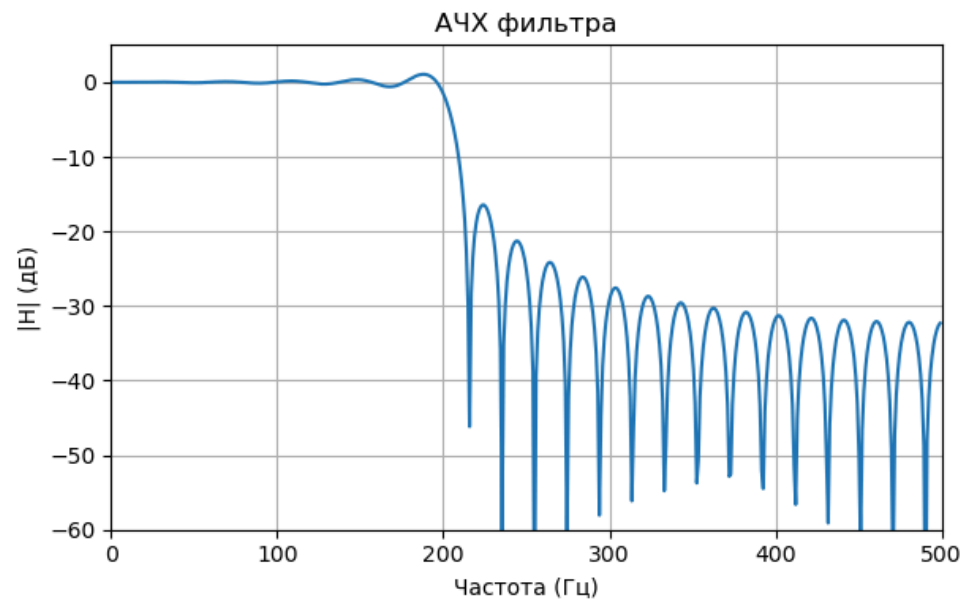
- Для ФНЧ: $A[k] = 1$ для $k \leq K_c$, $A[k] = 0$ для $k \geq K_c + \Delta$, где $K_c = \frac{N-1}{2} \cdot \frac{f_c}{f_s/2}$.

3. **Добавить линейную фазу** для симметрии импульсной характеристики относительно центра окна:

$$H[k] = A[k] \cdot \exp\left(-j \frac{\pi k(N-1)}{N}\right)$$

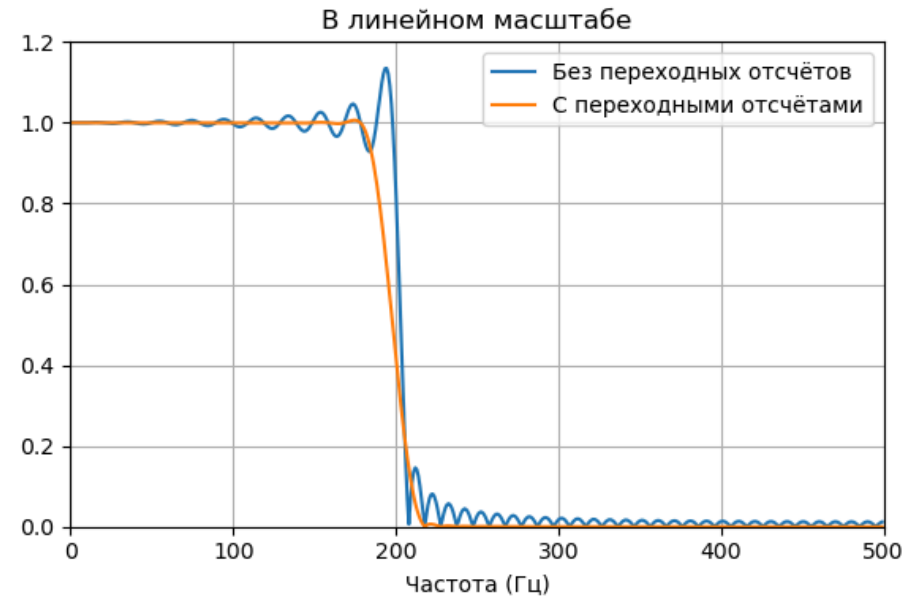
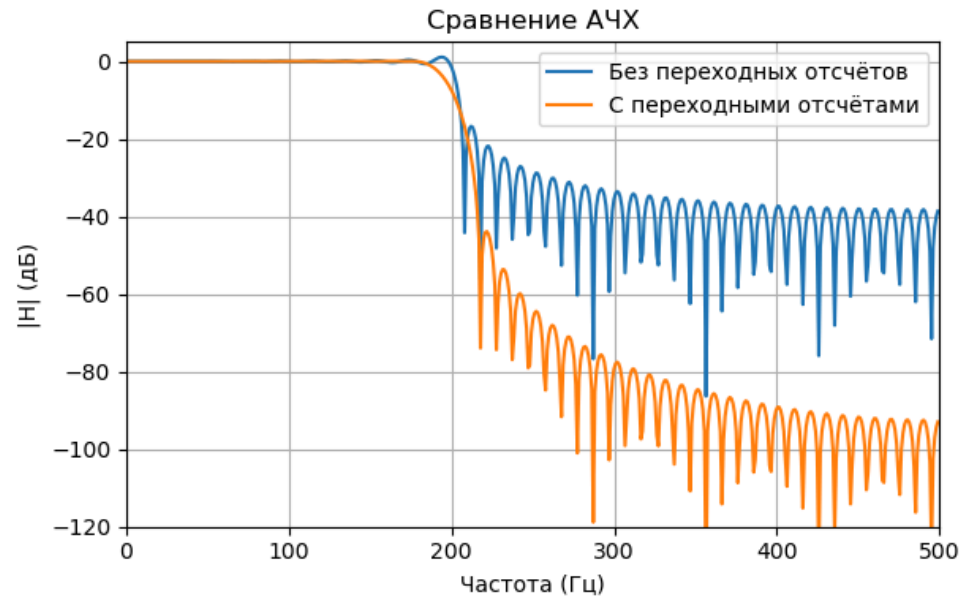
4. **Учесть симметрию:** для вещественного импульсного отклика $H[N-k] = H^*[k]$.

5. **Вычислить ОДПФ** $h[n] = \text{real}\left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H[k] e^{j2\pi kn/N}\right)$.

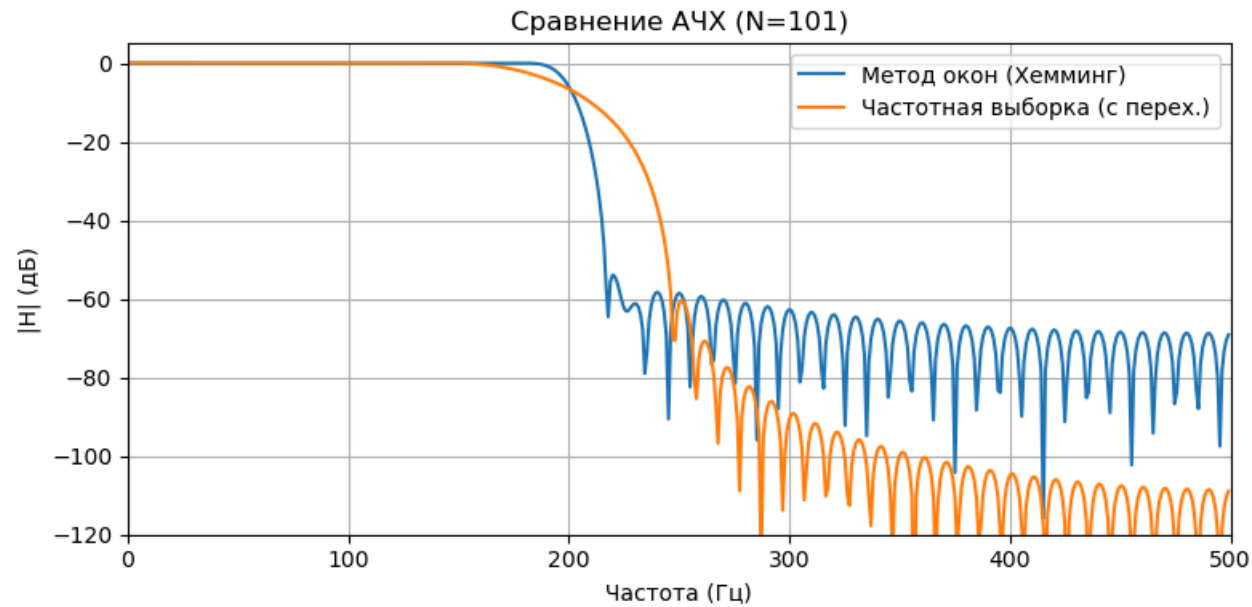


4.3. Борьба с пульсациями: введение переходных отсчётов (transition samples)

Чтобы уменьшить пульсации, вместо скачка от 1 к 0 вводят **переходную полосу** с плавным изменением (например, линейным или косинусоидальным). Значения $H[k]$ в нескольких точках около среза делают промежуточными (например, 0.5).



4.4. Сравнение метода частотной выборки с методом окон

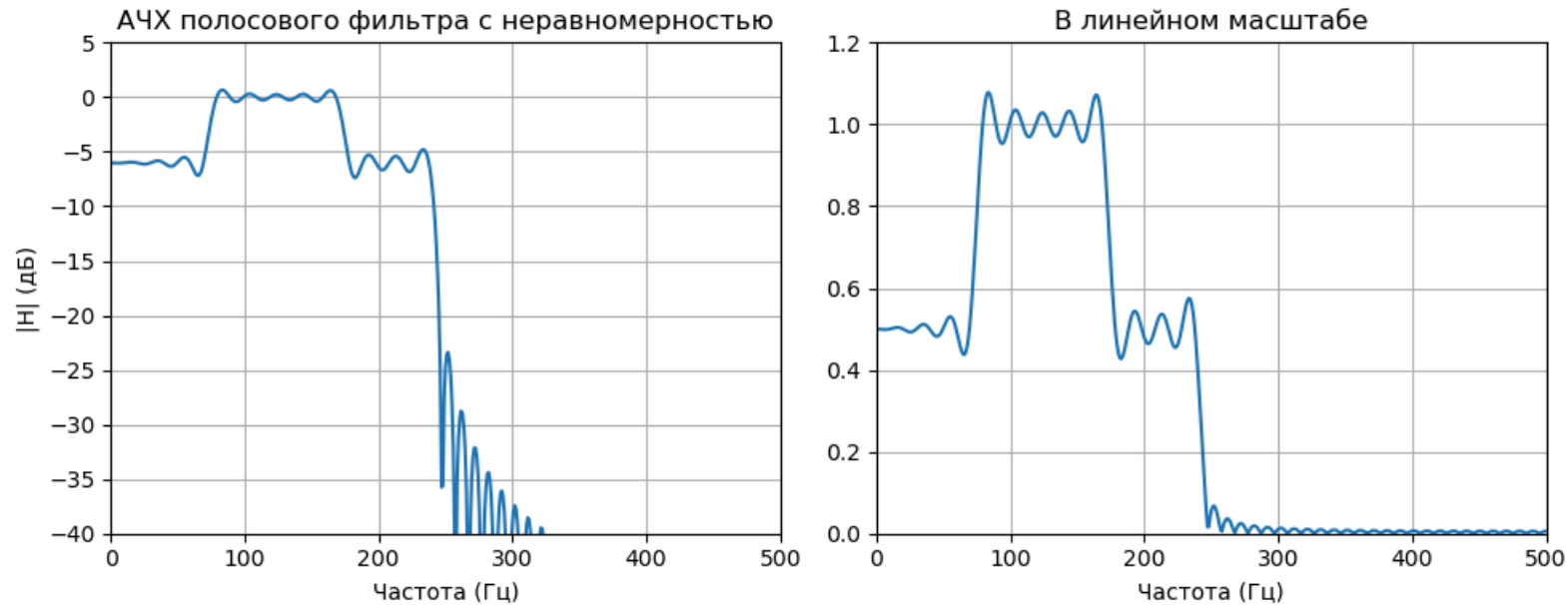


Выводы:

- Метод окон проще и даёт хорошие результаты для типовых ФНЧ.
- Метод частотной выборки удобен для **произвольных** АЧХ (многополосные, дифференциаторы, корректоры).
- Основной недостаток частотной выборки – необходимость вручную подбирать переходные отсчёты для контроля пульсаций.

4.5. Пример произвольной АЧХ

Метод частотной выборки легко адаптировать для нестандартных фильтров, например, полосового с неравномерным усилением.



5. Равноволновой метод (Паркса – МакКлеллана)

5.1. Идея метода

Недостатки метода окон и частотной выборки:

- Метод окон: невозможно независимо управлять пульсациями в полосе пропускания и заграждения.
- Частотная выборка: требует подбора переходных отсчётов.

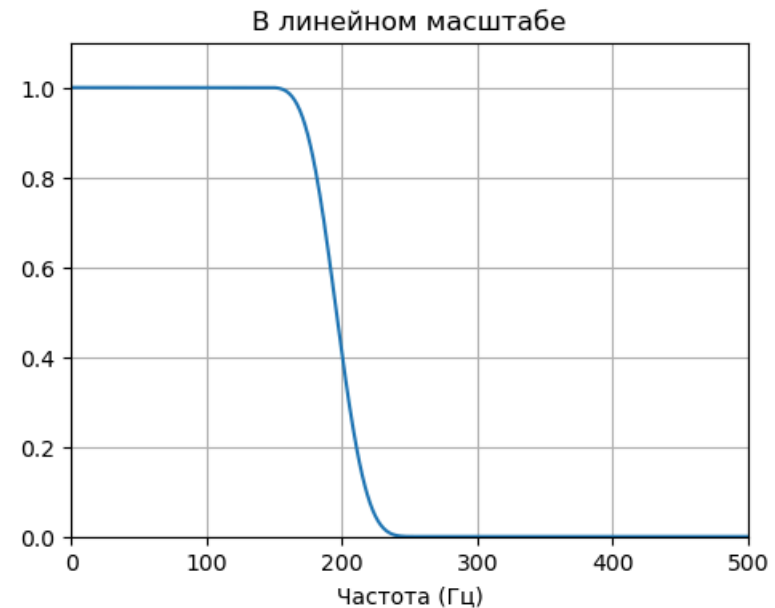
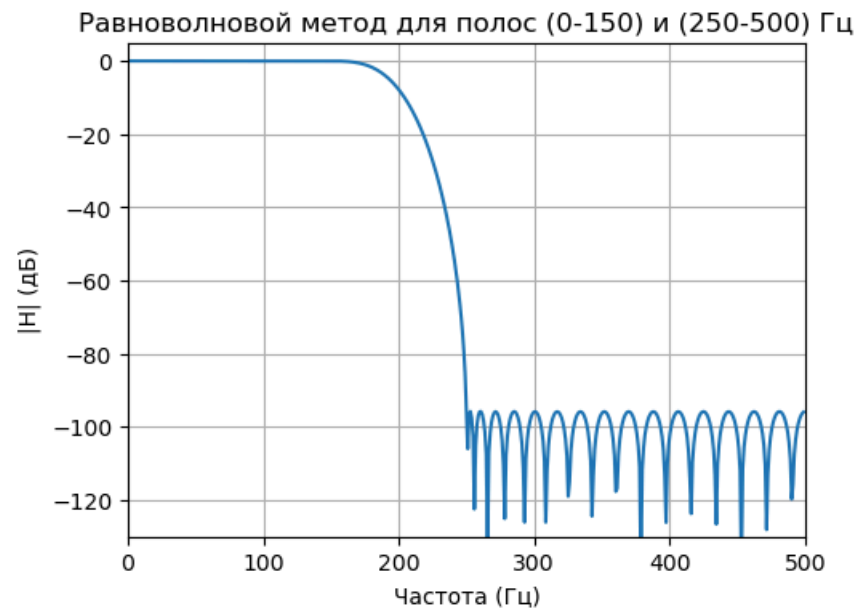
Равноволновой (оптимальный) метод (также известен как алгоритм Ремеза или Паркса – МакКлеллана) минимизирует **максимальную ошибку** между желаемой и реальной АЧХ:

$$\min_{h[n]} \max_{\omega \in \mathcal{F}} W(\omega) |H_{ид}(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})|$$

где \mathcal{F} – объединение полос пропускания и заграждения, $W(\omega)$ – весовые коэффициенты.

Свойства:

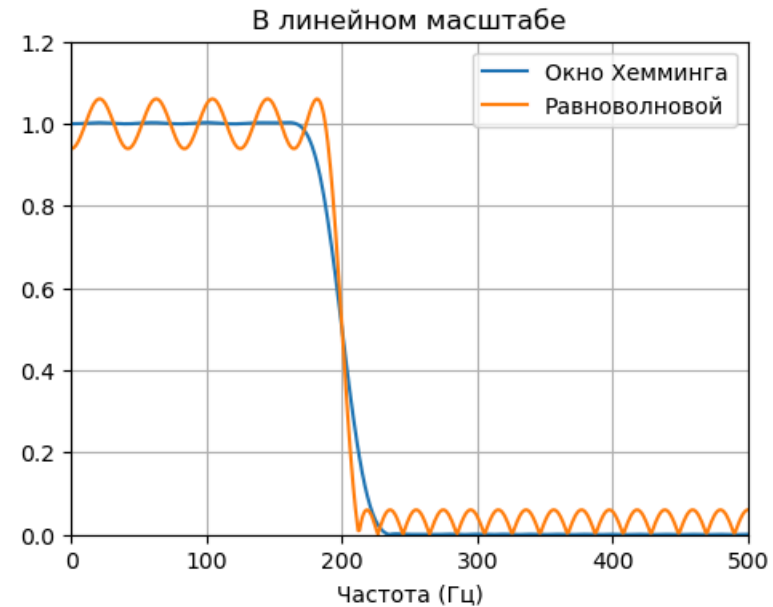
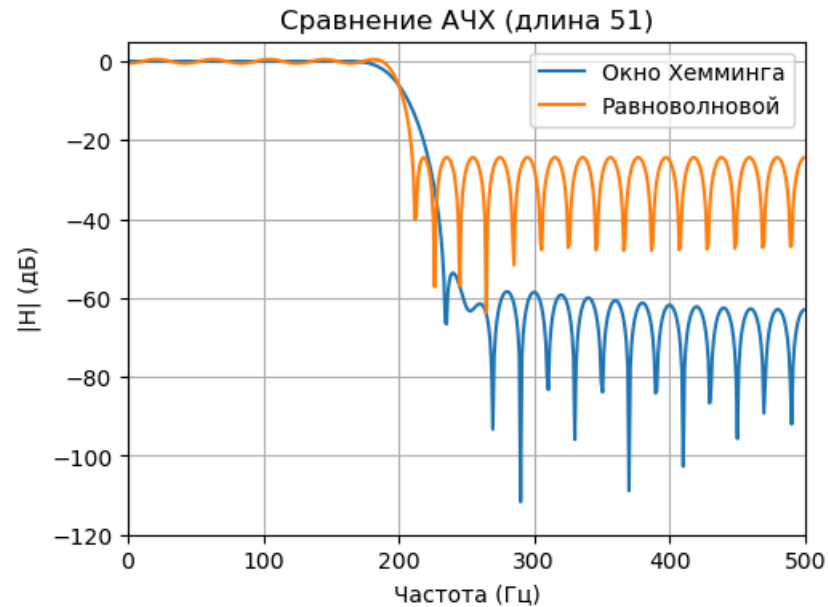
- Пульсации в полосах пропускания и заграждения **равноволновые** (одинаковая амплитуда).
- Реализован в `scipy.signal.remez` (или `firpm`).



5.2. Сравнение равноволнового метода с методом окон

Для одинаковой длины фильтра ($N=51$) сравним АЧХ:

- Метод окон (Хемминга) – `firwin`
- Равноволновой метод (Паркса – МакКлеллана) – `remez`



Наблюдения:

- Равноволновой метод даёт **более крутой спад** при той же длине.
- Пульсации равномерно распределены в полосах пропускания и заграждения.
- Метод окон имеет монотонный спад в полосе пропускания (нет пульсаций), но более пологий переход.

6. Синтез БИХ-фильтров – общий подход

Аналоговые прототипы

В аналоговой области существуют классические фильтры с оптимальными свойствами:

- **Баттерворт** – максимально гладкая АЧХ.
- **Чебышев тип I** – равноволновые пульсации в полосе пропускания.
- **Чебышев тип II** – равноволновые пульсации в полосе заграждения.
- **Эллиптический (Кауэра)** – пульсации в полосе пропускания и заграждения, самый крутой спад.

Общая стратегия синтеза БИХ-фильтров:

1. **Аналоговый прототип** – выбираем тип фильтра (Баттерворт, Чебышев, эллиптический) и его параметры (порядок, неравномерность, затухание).
2. **Аналоговая передаточная функция $H(s)$** – рассчитываем полюса и нули.

3. **Билинейное преобразование** – отображаем $H(s)$ в $H(z)$ с заменой $s = 2\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ (с учётом деформации частоты).

4. **Получение коэффициентов** разностного уравнения b_k, a_k .

В Python все шаги автоматизированы в функциях:

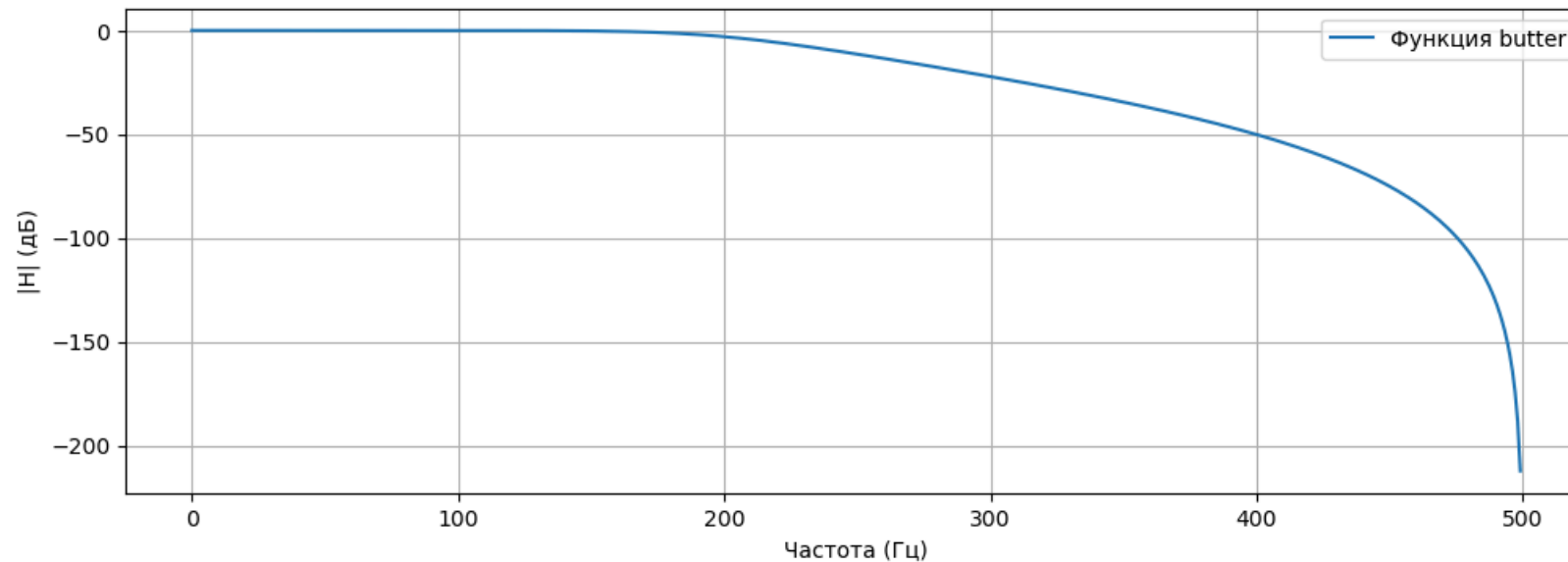
- `scipy.signal.butter`, `cheby1`, `cheby2`, `ellip` – проектирование цифровых фильтров напрямую.
- `scipy.signal.bilinear` – билинейное преобразование аналоговой системы.

7. Фильтр Баттерворта

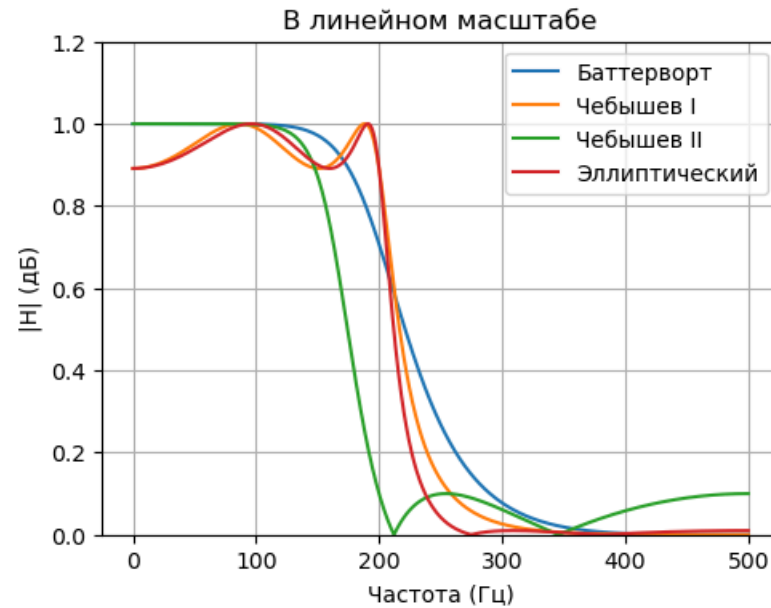
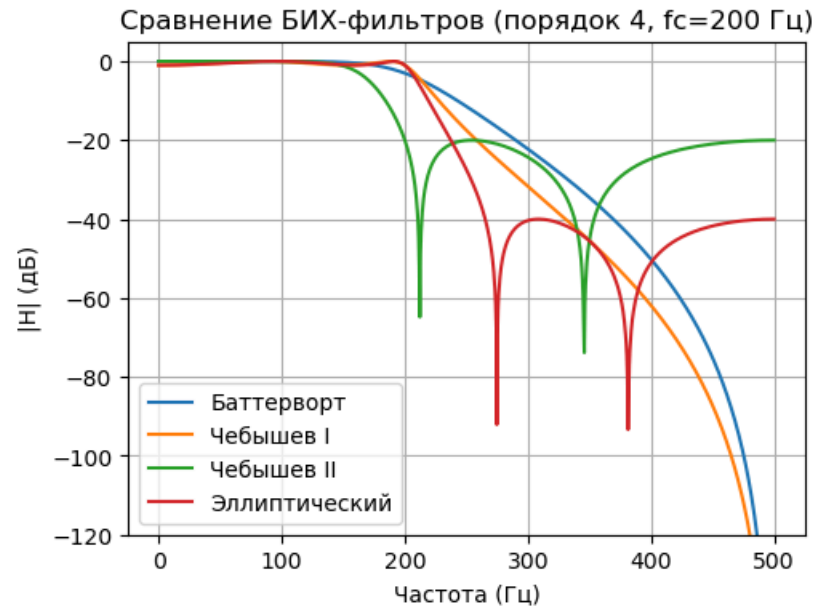
Аналоговый ФНЧ Баттерворта порядка n имеет передаточную функцию:

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2n}}$$

Полюса равномерно расположены на левой полуокружности. Для $n = 4$, $\Omega_c = 2\pi f_c$.



8. Сравнение БИХ-фильтров

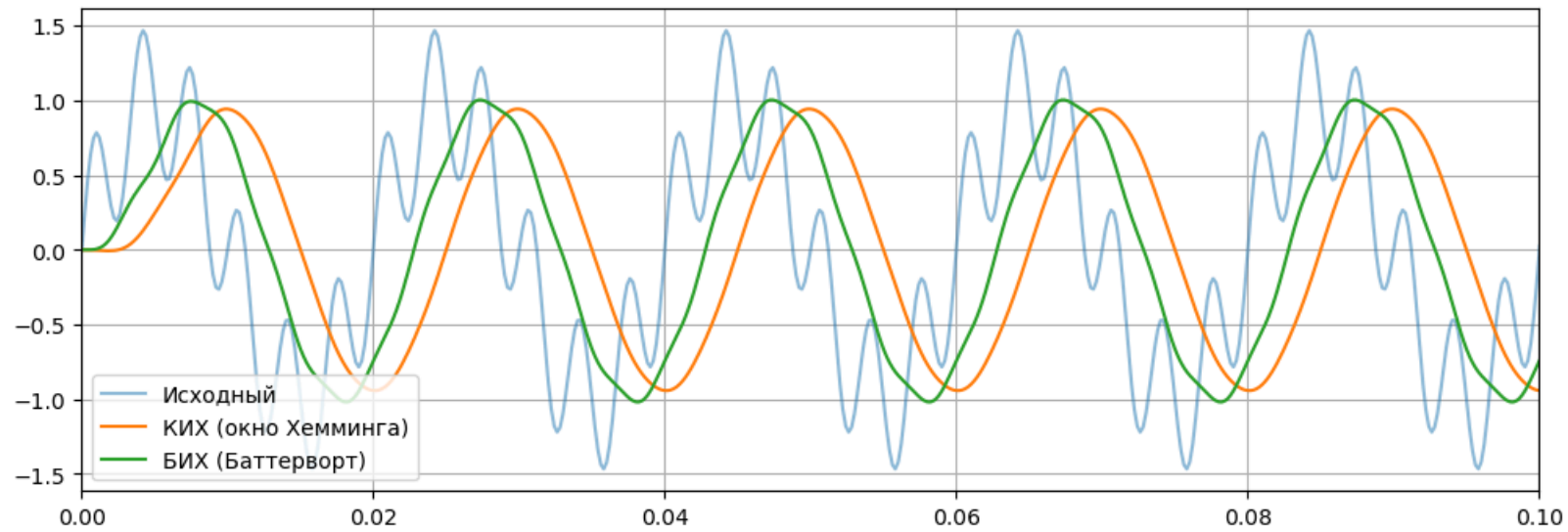


Наблюдения:

- Эллиптический – самый крутой спад, но сильные пульсации в обеих полосах.
- Чебышев I – компромисс между крутизной и пульсациями в ПП.
- Баттерворт – монотонная АЧХ, самый пологий спад.

9. Пример применения спроектированных фильтров

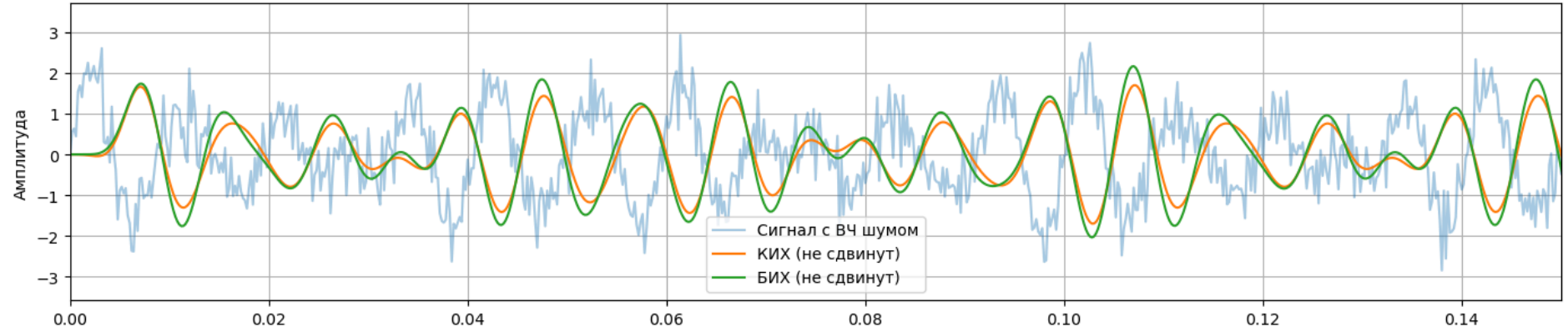
Сгенерируем смесь двух синусоид (50 и 300 Гц) и пропустим через ФНЧ с $f_c=150$ Гц.



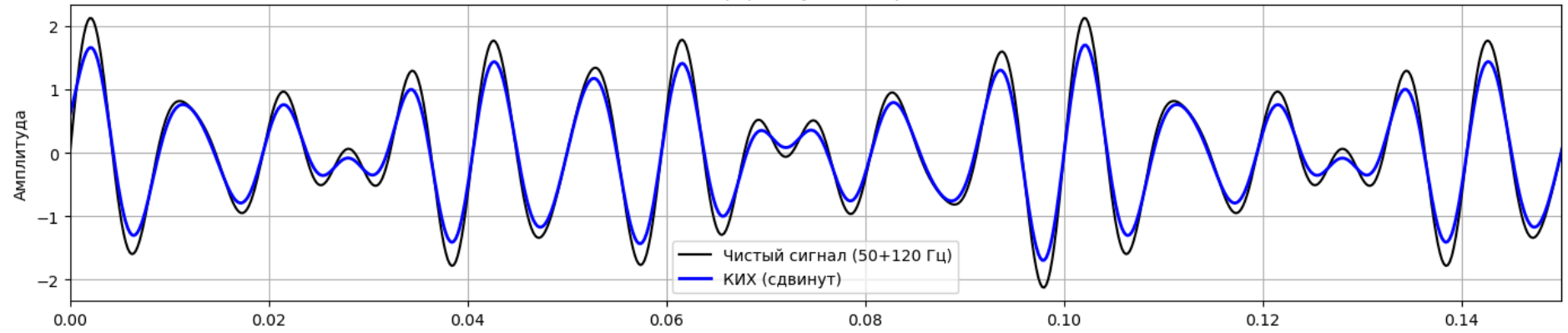
Наблюдение: оба фильтра подавляют 300 Гц, но КИХ вносит большой фазовый сдвиг.

КИХ, однако, не искажает форму сигнала. Рассмотрим сумму синусоид с высокочастотным шумом.

Выходы фильтров (без компенсации задержек)



КИХ: форма суммы сохранена



БИХ: форма искажена

