Лекция №7: Адаптивные и нелинейные фильтры

1. Введение

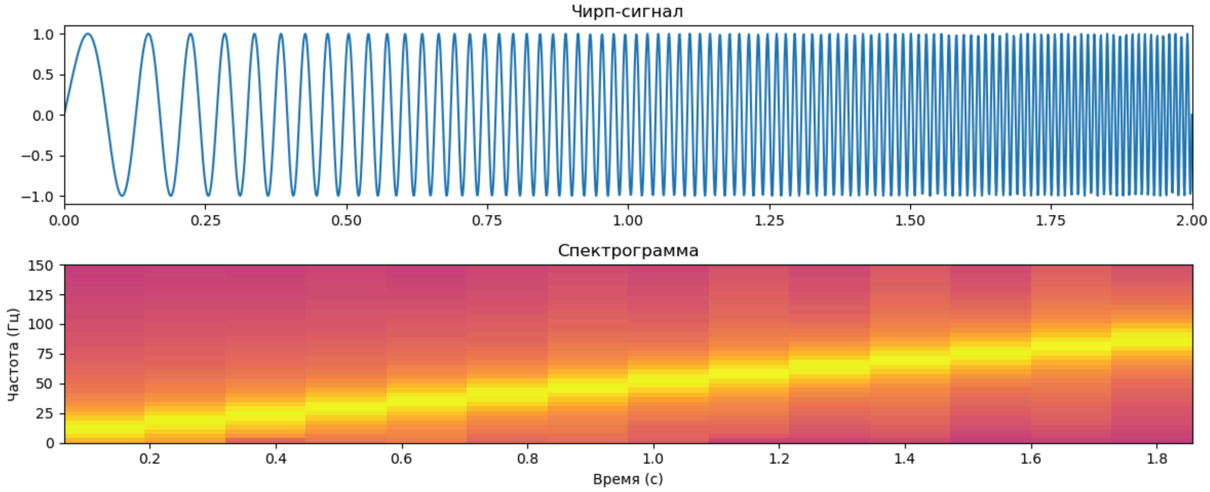
Мотивация

- Классические КИХ/БИХ-фильтры имеют **фиксированные коэффициенты**, рассчитанные для стационарных условий.
- Во многих реальных приложениях сигналы и помехи **меняются во времени** (нестационарны), а их статистические характеристики априорно неизвестны.

Примеры, где нужна адаптация:

- Шумоподавление в наушниках (активное шумоподавление) – характеристики шума зависят от окружения.
- Эхокомпенсация в громкой связи – акустический тракт меняется при движении человека.
- Адаптивная идентификация системы – неизвестный канал связи.
- Медицина (ЭЭГ) – удаление артефактов за счёт адаптивной фильтрации.

Ключевая идея адаптивных фильтров:
Фильтр автоматически изменяет свои коэффициенты в реальном времени, отслеживая изменения сигнала. Алгоритм адаптации стремится минимизировать ошибку между выходом фильтра и желаемым сигналом.



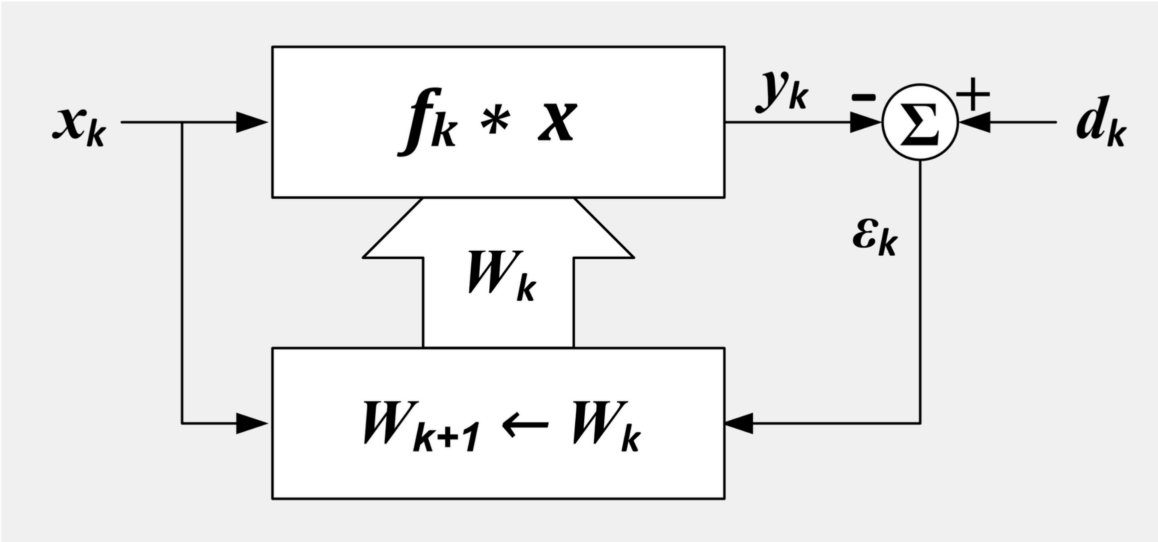
Вывод: Для такого нестационарного сигнала фиксированный фильтр неэффективен – нужна адаптация.

2. Базовые принципы адаптивной фильтрации

Структура адаптивного фильтра

Адаптивный фильтр состоит из двух частей:

1. **Цифровой фильтр с переменными коэффициентами** (чаще всего КИХ-структура для гарантии устойчивости).
2. **Алгоритм адаптации** (механизм обновления коэффициентов), минимизирующий ошибку.



- $d[k]$ – желаемый сигнал + нежелательные помехи
- $x[k]$ – сигналы, коррелирующие с нежелательными помехами
- $\varepsilon[k]$ – остаточная ошибка адаптации (в идеале совпадает с желаемым сигналом)
- $W[k]$ – набор коэффициентов фильтра
- $f[k]$ – импульсная характеристика фильтра

Основные конфигурации применения

- **Идентификация системы (System Identification):** Адаптивный фильтр моделирует неизвестную систему: x – исходный сигнал (шум), d – исходный сигнал, пропущееный через исследуемую систему.
- **Подавление шума (Noise Cancellation):** d – основной сигнал с шумом неизвестного состава, x – опорный шум.
- **Эхокомпенсация (Echo Cancellation):** Предсказание эха для его вычитания из сигнала. d – сигнал с эхом, x – реплика сигнала с задержкой во времени.
- **Обратное моделирование (Equalization):** Восстановление сигнала, искажённого каналом. d – искажённый сигнал, x – реплика исходного сигнала. Коэффициента фильтра используются для компенсации искажений.

3. Алгоритм LMS (Least Mean Squares)

LMS – самый распространённый алгоритм адаптации благодаря своей простоте и вычислительной эффективности.

Математическая формулировка

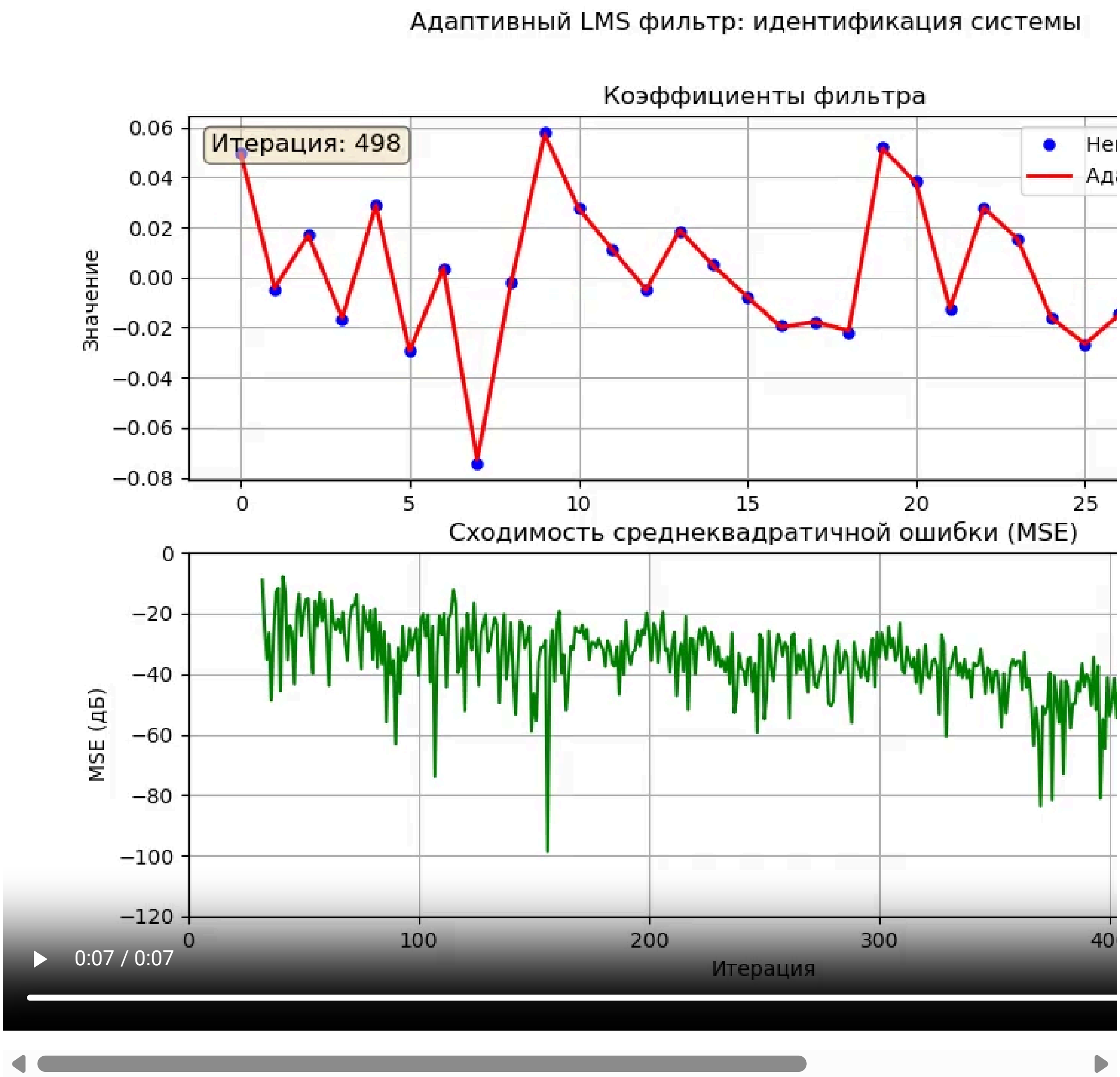
Для фильтра длины N коэффициенты $w(n)$ обновляются на каждом отсчёте:

$$\begin{aligned} y(n) &= w(n)^T x(n) \quad \text{(выход фильтра)} \\ e(n) &= d(n) - y(n) \quad \text{(ошибка)} \\ w(n+1) &= w(n) + \mu e(n) x(n) \quad \text{(обновление коэффициентов)} \end{aligned}$$

где:

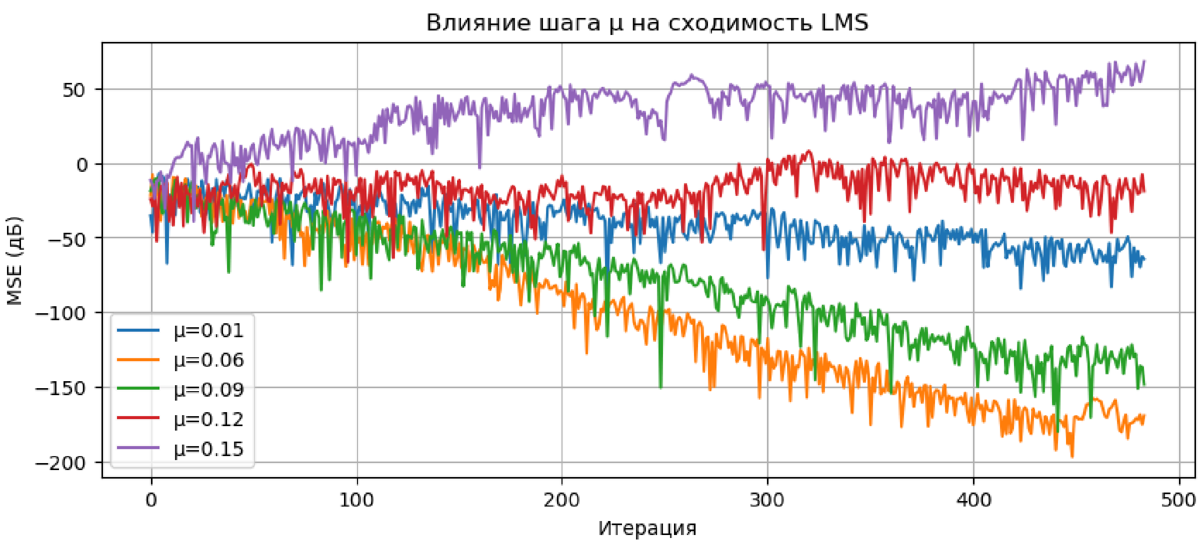
- $x(n) = [x(n), x(n-1), \ldots, x(n-N+1)]^T$ – вектор входных отсчётов.
- $d(n)$ – желаемый сигнал (reference).
- μ – **шаг адаптации** (step size), управляющий скоростью сходимости.

Out[42]:



Выбор шага адаптации μ

- μ слишком **малое** → медленная сходимость, но хорошая устойчивость.
- μ слишком **большое** → быстрая сходимость, но риск расходимости (неустойчивость).



4. Вариации и улучшения LMS

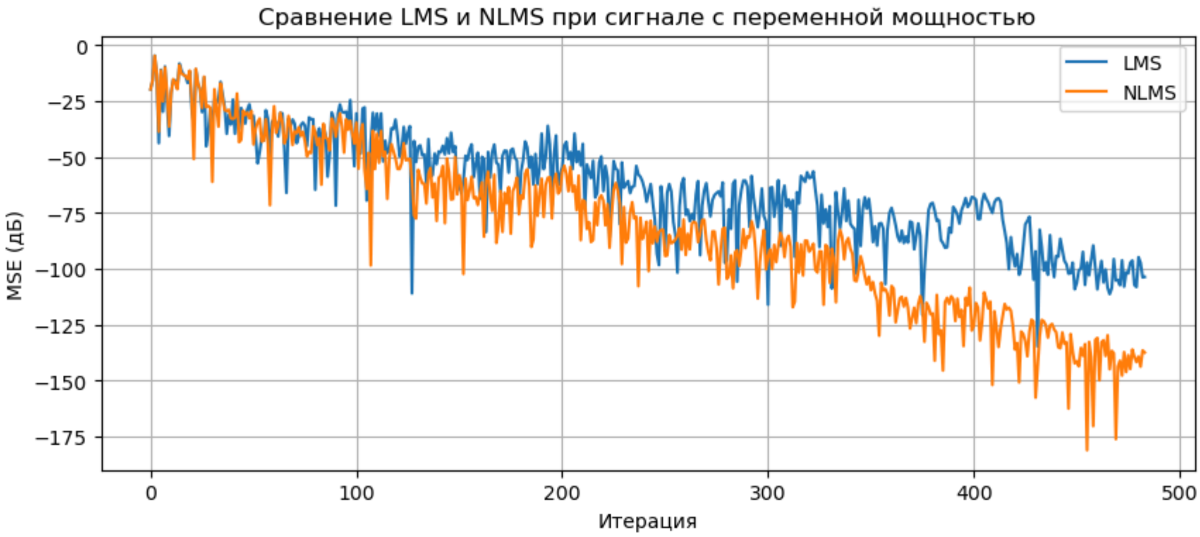
NLMS (Normalized LMS)

Стандартный LMS чувствителен к амплитуде входного сигнала. NLMS нормализует шаг обновления по мощности входного сигнала:

$$w(n+1) = w(n) + \frac{\mu}{\|x(n)\|^2 + \varepsilon} e(n)x(n)$$

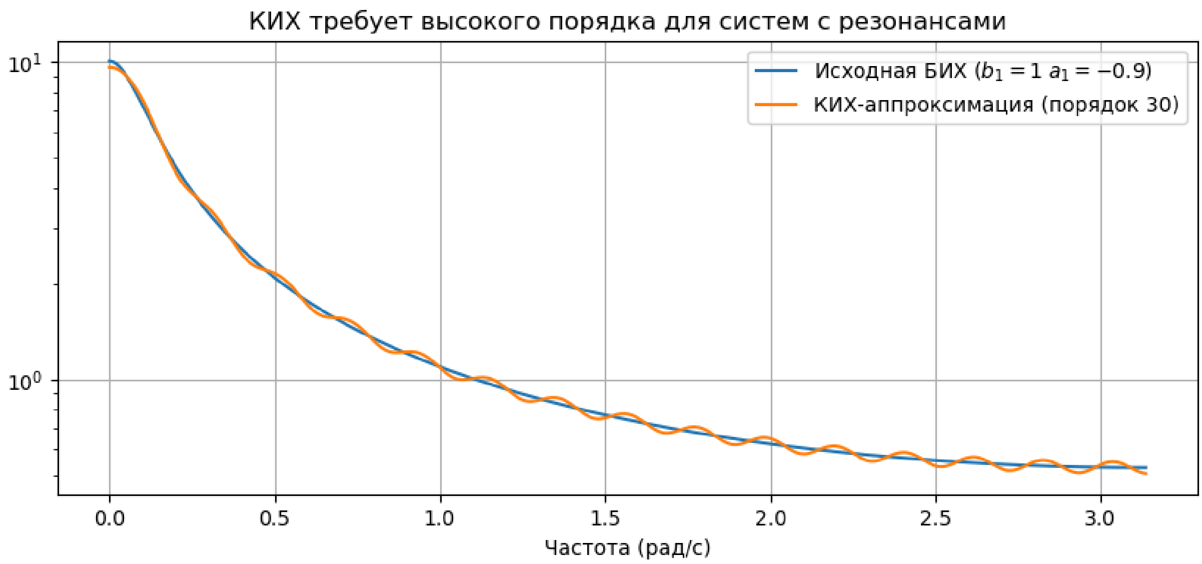
где ε – малая константа для предотвращения деления на ноль.

Преимущество: Более робастная работа при сигналах с меняющейся громкостью.



Рекурсивные адаптивные фильтры (Recursive LMS / IIR Adaptive Filters)

Классический LMS-адаптер использует **КИХ-фильтр**. Преимущества КИХ: простота, устойчивость. Недостаток: для моделирования систем с резонансами требуется большой порядок.



Рекурсивный (БИХ) адаптивный фильтр содержит обратную связь, что позволяет моделировать системы с резонансами более экономично. Сложность: возможна неустойчивость, а алгоритм минимазации ошибки может застревать в локальных минимумах.

Структура рекурсивного адаптивного фильтра

Выходной сигнал БИХ-адаптивного фильтра:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k(n)x(n-k) + \sum_{k=1}^{N} a_k(n)y(n-k)$$

Вектор коэффициентов $\mathbf{w}(n) = [b_0, \ldots, b_M, a_1, \ldots, a_N]^T$ обновляется адаптивно.

Проблема: ошибка $e(n)$ зависит от прошлых выходов, которые сами зависят от коэффициентов. Градиентный спуск сложнее (необходимо фильтровать регрессоры).

Алгоритм R-LMS (Recursive LMS, Filtered Error Approach)

Один из методов: **уравнение ошибки** (equation error) – вместо рекурсии подставлять желаемый сигнал $d(n)$ в обратную связь. Это упрощает градиент, но даёт смещённые оценки.

Другой подход: **output error** – правильно учитывает рекурсию, но требует вычисления чувствительности. Используется фильтрация градиентов через оценку чувствительности.

Как обеспечить устойчивость БИХ-адаптации?

- **Проекция полюсов:** после каждого обновления коэффициентов проверять, чтобы полюса лежали внутри единичной окружности. Если нет – масштабировать.
- **Алгоритмы с регуляризацией:** добавление штрафа за приближение полюсов к границе.

5. Нелинейные фильтры – борьба с импульсными помехами

В отличие от линейных фильтров, нелинейные не подчиняются принципу суперпозиции и способны эффективно удалять выбросы (impulsive noise), сохраняя при этом резкие границы сигнала – то, с чем линейные фильтры справляются плохо.

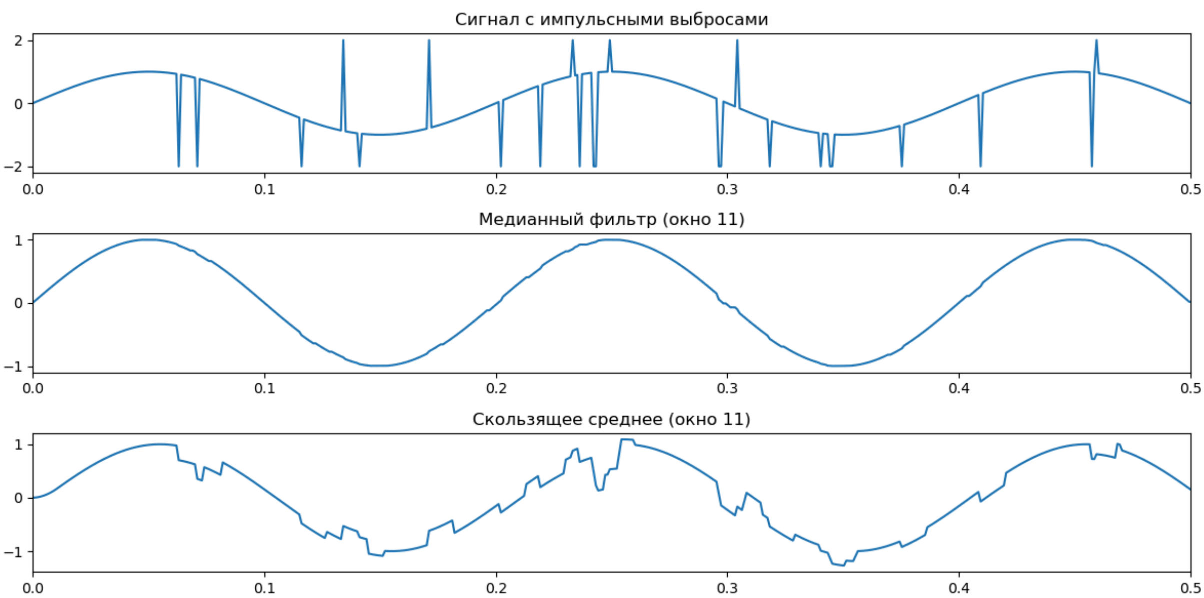
Медианный фильтр

Медианный фильтр заменяет каждый отсчёт на медианное значение в скользящем окне:

$$y[n] = \mathrm{median}\{x[n-K], \ldots, x[n], \ldots, x[n+K]\}$$

Ключевые свойства медианного фильтра:

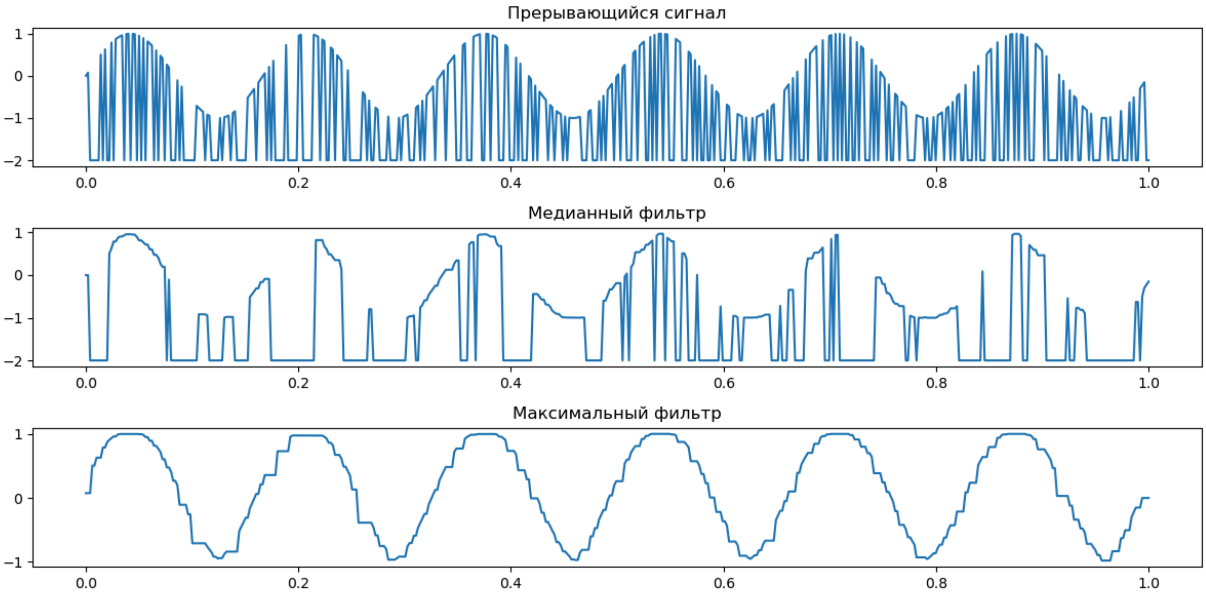
- Эффективно удаляет **импульсный шум** (type соль-и-перец).
- **Сохраняет резкие перепады** (edges) – в отличие от линейного сглаживания.
- Не вносит сдвига фазы (в отличие от БИХ-фильтров).



Другие порядковые статистические фильтры

Кроме медианы, к этому классу относятся:

- **Максимальный фильтр** $y[n] = \max(x[n-K..n+K])$ – расширение светлых областей изображения.
- **Минимальный фильтр** $y[n] = \min(x[n-K..n+K])$ – расширение тёмных областей.
- **Альфа-усечённое среднее** – отбрасывание экстремальных выбросов и усреднение оставшихся отсчётов.
- **Взвешенные порядковые фильтры** – линейная комбинация порядковых статистик для улучшения характеристик.



6. Калмановская фильтрация

Фильтр Калмана – рекурсивный алгоритм оценки состояния динамической системы по зашумлённым измерениям. Байесовская интерпретация связывает его с адаптивной фильтрацией при гауссовских шумах.

Ключевые концепции

1. **Модель состояния:** Система описывается переменными состояния x_k, эволюционирующими во времени.
2. **Прогноз (Predict):** Оценка следующего состояния на основе текущего состояния и модели эволюции.
3. **Коррекция (Update):** Уточнение оценки после получения нового измерения.

Параметры модели:

- F – матрица перехода состояния (модель эволюции).
- H – матрица наблюдения (связь измерений с состоянием).
- Q – ковариация шума процесса.
- R – ковариация шума измерений.

Предсказание состояния:

$$x_k = F_k x_{k-1} + w_k$$

где w_k – шум, характеризуемый Q.

Наблюдение:

$$z_k = H_k \tilde{x}_k + v_k$$

где $\tilde{x}_k$ – истинное (неизвестное) состояние, v_k – шум, характеризуемый R.

Невязка (обновляющий процесс, innovation) для минимизации:

$$y_k = z_k - H_k x_k$$

Адаптивная калмановская фильтрация

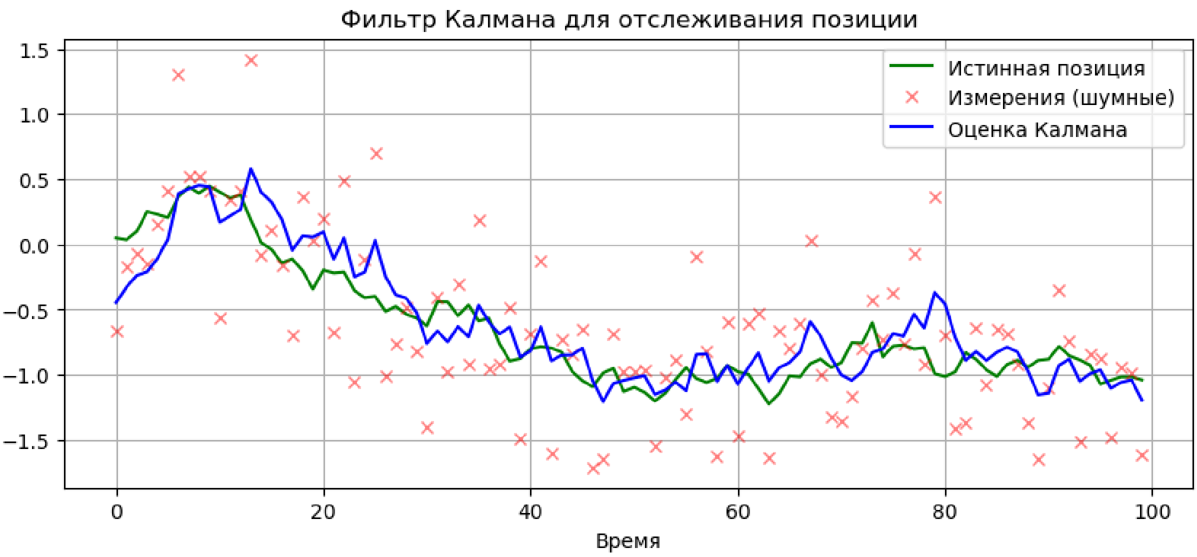
В реальных системах параметры шума Q и R часто неизвестны и могут меняться. **Адаптивный фильтр Калмана** оценивает эти параметры онлайн, используя невязки измерений.

Пример применения: Отслеживание движущегося объекта на радаре или навигация БПЛА.

Простейший пример: прямое отслеживание состояния в предположении его неизменности во времени

$$F = H = 1$$
$$Q = 0.05$$
$$R = 0.5$$
$$K = \frac{P_{k-1} + Q}{P_{k-1} + Q + R}$$
$$x_k = x_{k-1} + K(z_k - x_{k-1})$$
$$P_k = (1 - K) \cdot (P_{k-1} + Q)$$

- Коэффициент Калмана K определяет, насколько сильно новые данные z_k влияют на изменение оценки.
- Величина P_k определяет достоверность имеющейся оценки. При $P_k \to \infty$, $K \approx 1$ и $x_k \approx z_k$, т. е. мы считаем, что наша оценка очень плоха и надо довериться измерению. При $P_k \to 0$, $K \approx 0$ и $x_k \approx x_{k-1}$, т. е. мы считаем, что наша оценка точна и измерение её почти не меняет.
- На каждой итерации P_k увеличивается на величину шума процесса Q, а K приравнивается отношению нашей ожидаемой истинной ошибки ($\sim Q$) к ожидаемой видимой ($\sim Q + R$)



7. Современные направления: нейросети и гибридные методы

Классические адаптивные алгоритмы успешно работают в условиях, где статистические модели шума известны или могут быть хорошо аппроксимированы.

Классические vs глубокие методы

Характеристика	Классическая адаптация	Глубокие сети
Вычислительная сложность	Низкая (O(N) для LMS)	Высокая (обучение + инференс)
Требования к данным	Минимальные	Большие обучающие выборки
Прозрачность	Полная (математические модели)	Низкая («чёрный ящик»)
Адаптация на лету	Да (LMS, RLS, Калман)	Ограничена (требуется переобучение)
Устойчивость к сложным шумам	Средняя	Высокая (для апробированных задач)

Гибридные подходы

- **Глубокое разворачивание (deep unrolling):** Классический адаптивный алгоритм разворачивается в нейросеть, параметры которой обучаются, что даёт преимущества и по скорости, и по точности.
- **Адаптивные фронтенды с обучением (Ada-FE):** Алгоритм фильтрации фиксируется, нейросеть обучается контролировать его параметры в зависимости от входного сигнала. Могут превосходить полностью обученные архитектуры в задачах обработки аудио благодаря своей устойчивости при вариативности входных данных.