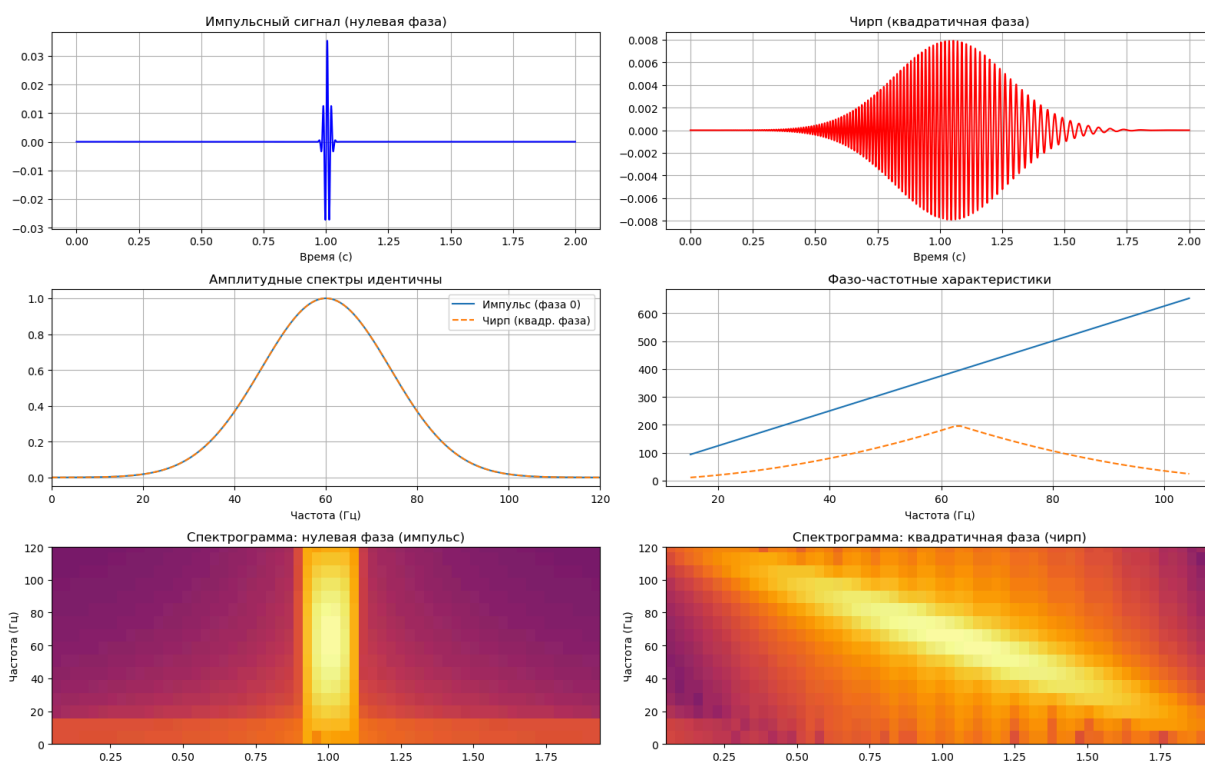


Лекция №8: Частотно-временной анализ и вейвлет-преобразования

1. Проблема преобразования Фурье для нестационарных сигналов

Классическое преобразование Фурье даёт **частотный состав сигнала в целом**, но совершенно не даёт информации о том, **когда** появились те или иные частоты.

Пример: Глиссандо (сигнал с нарастающей частотой) и сигнал, состоящий из последовательности коротких тонов разной частоты, могут иметь одинаковый спектр Фурье, хотя их временная структура кардинально различна.



Вывод: Спектры Фурье практически неразличимы, хотя сигналы очень разные. Необходимы методы, дающие **частотно-временное представление**.

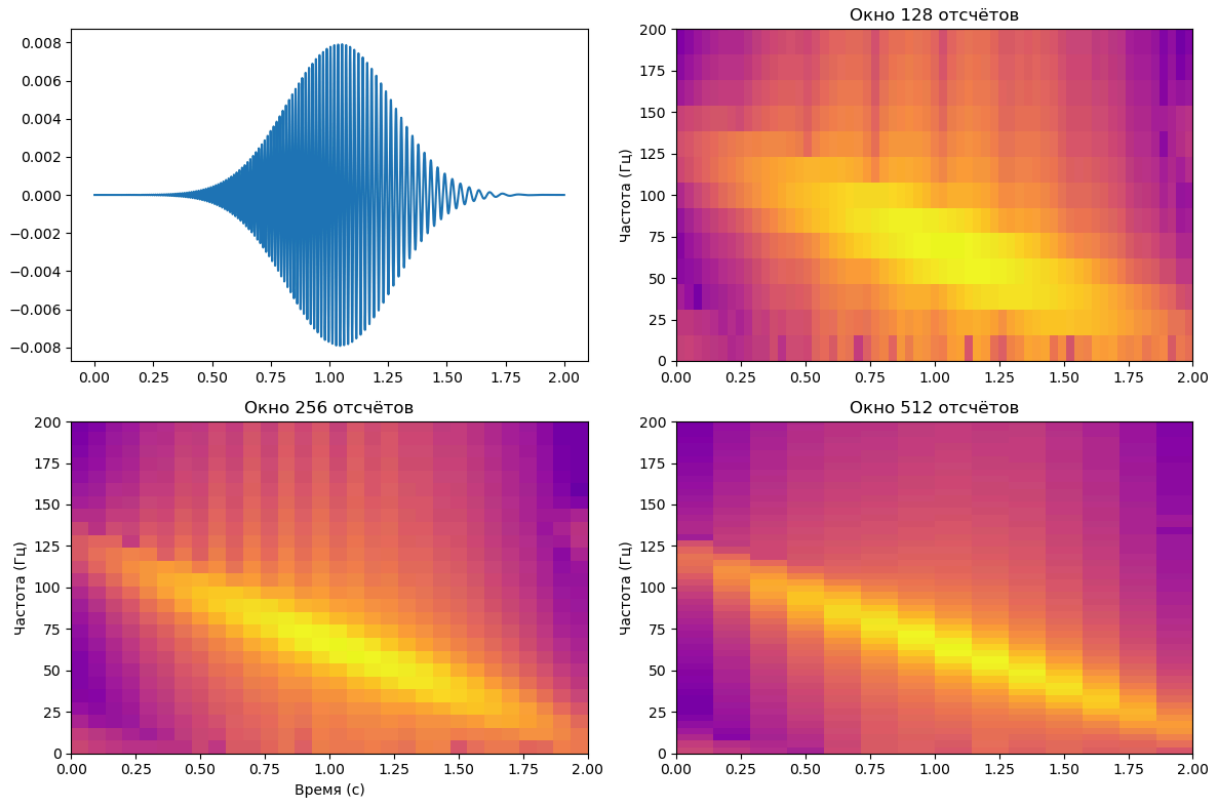
2. Оконное преобразование Фурье (Short-time Fourier transform, STFT)

Идея STFT

Окно фиксированной длины скользит по сигналу, на каждом фрагменте вычисляется БПФ. Получается **спектрограмма** – зависимость спектра от времени.

$$\text{STFT}\{x(t)\}(\tau, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w(t - \tau)e^{-j2\pi ft} dt$$

- $w(t)$ – оконная функция (Ханна, Хемминга и др.)
- Размер окна определяет компромисс между временным и частотным разрешением.



Недостаток STFT: фиксированное разрешение

- Короткое окно → хорошее временное разрешение, но плохое частотное.
- Длинное окно → хорошее частотное, но плохое временное.
- Невозможно одновременно получить высокое разрешение и по времени, и по частоте.

Для сигналов, где есть и быстрые переходы (высокие частоты, короткая длительность), и медленные изменения (низкие частоты, длинные), нужен **адаптивный** подход – вейвлеты.

3. Введение в вейвлет-преобразование

Идея вейвлетов

Вейвлет-анализ использует **масштабирование** и **сдвиг** материнского вейвлета $\psi(t)$:

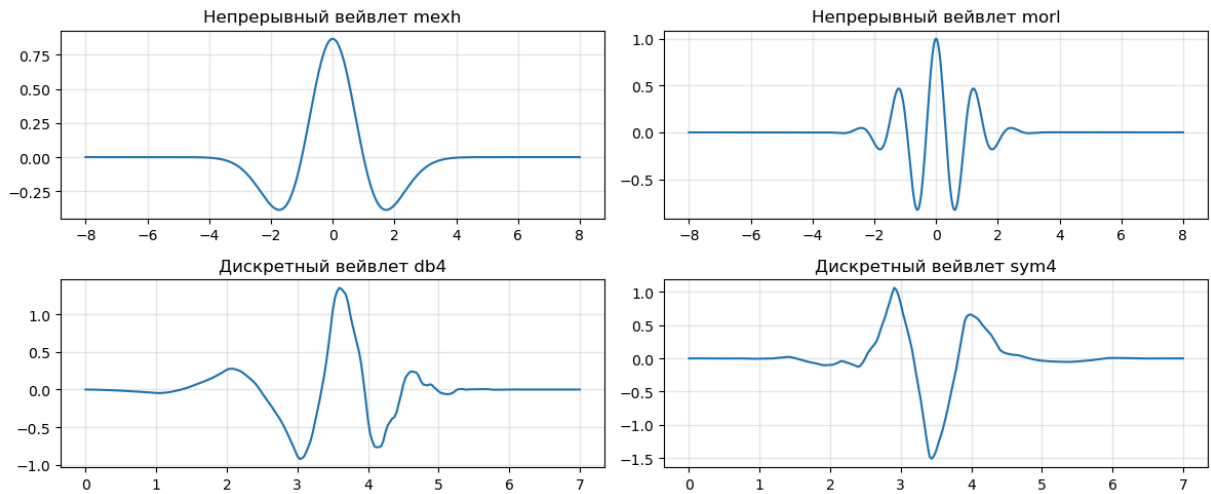
$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

- a – масштаб (обратно пропорционален частоте): малые a → сжатый вейвлет → высокие частоты, хорошее временное разрешение.
- b – сдвиг (положение во времени).

Непрерывное вейвлет-преобразование (CWT):

$$W(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_{a,b}^*(t) dt$$

В отличие от STFT, вейвлеты дают **переменное разрешение**: высокочастотные компоненты анализируются коротким окном (хорошее время, плохая частота), низкочастотные – длинным (хорошая частота, плохое время). Это соответствует природе многих сигналов.



Основные свойства вейвлетов

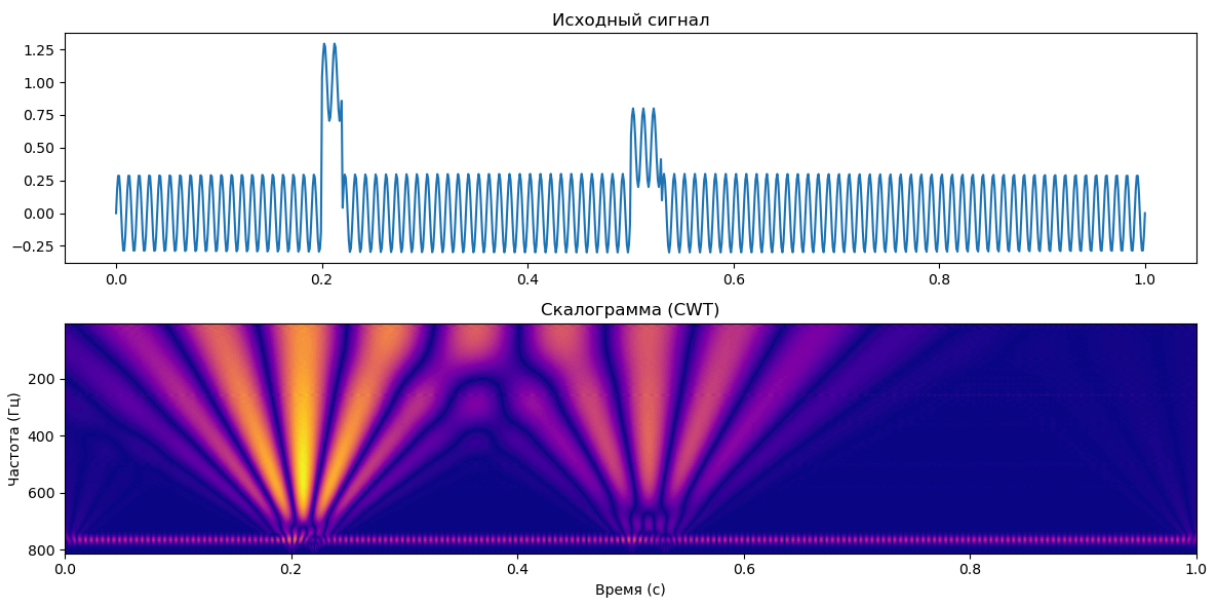
- **Локализация** во времени и частоте.
- **Нулевое среднее** $\int \psi(t) dt = 0$ (вейвлет – «всплеск»).
- Возможность **точного восстановления** сигнала (обратное преобразование).

Дискретные вейвлеты (DWT)

- Масштаб меняется дискретно (часто как степени двойки)
- Максимально компактное представление, достаточное для точного восстановления
- Может быть реализовано через каскад фильтров за $O(N)$
- Сложнее анализировать, но быстрее вычислять

4. Непрерывное вейвлет-преобразование (CWT) на практике

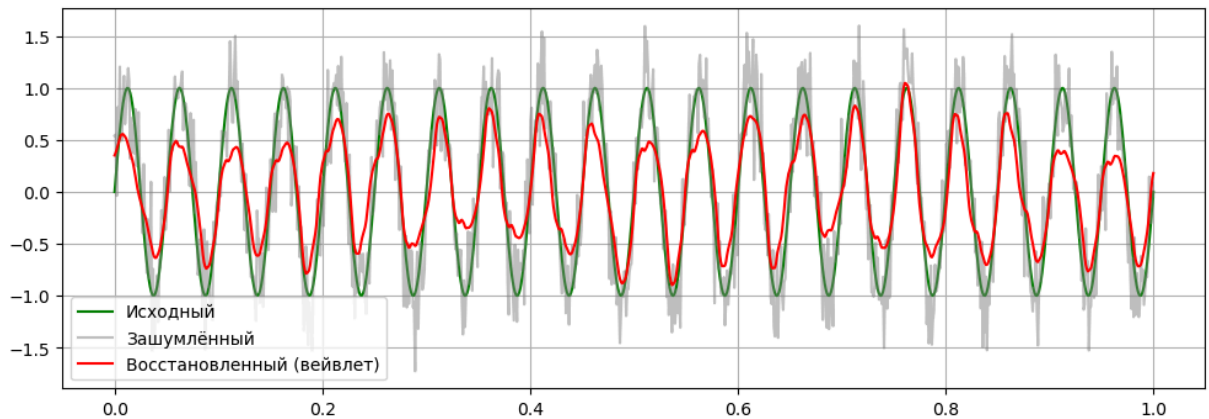
В Python CWT реализовано в модуле `pywt`.



Интерпретация: Скалограмма показывает, как меняется энергия сигнала по частотам и времени. Короткие импульсы видны как вертикальные полосы, синусоида – как горизонтальная.

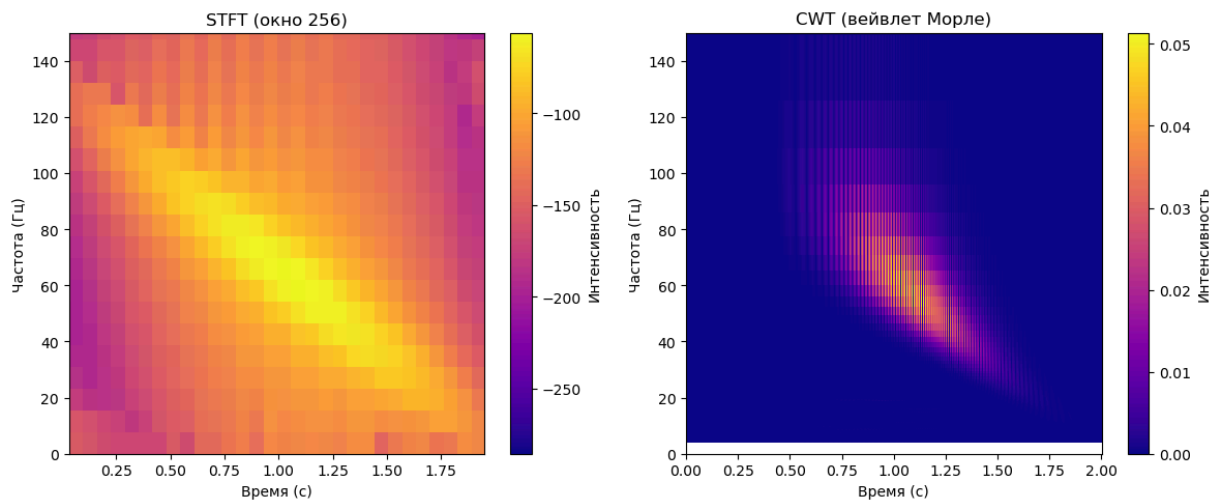
5. Вейвлет-денойзинг (подавление шума)

Идея: шум обычно сосредоточен в детализирующих коэффициентах низких уровней (высокие частоты) и имеет малую амплитуду. Подавление коэффициентов ниже порога (soft/hard thresholding) позволяет эффективно очистить сигнал.



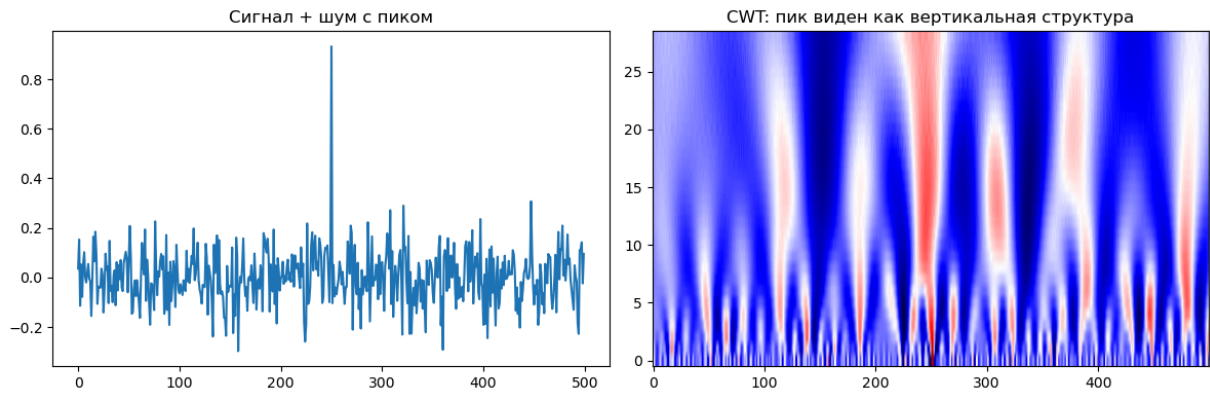
6. Сравнение STFT и вейвлетов

Характеристика	STFT	Вейвлеты (CWT/DWT)
Разрешение (время/частота)	Фиксированное (окно)	Адаптивное (масштаб)
Скорость вычислений	Быстрое (БПФ)	CWT – медленное; DWT – быстрое (O(N))
Простота интерпретации	Спектрограмма интуитивна	Скалограмма сложнее
Применения	Анализ стационарных/квазистационарных сигналов, аудио	Нестационарные, импульсные сигналы, сжатие, денойзинг



7. Применения вейвлетов в цифровой обработке сигналов

- Сжатие данных** – алгоритм JPEG2000 использует вейвлет-преобразование (биортогональные вейвлеты). Обеспечивает лучшее качество при сжатии с потерями по сравнению с ДКП.
- Денойзинг** – медицинские сигналы (ЭКГ, ЭЭГ), сейсмика.
- Обнаружение особенностей** (пиков, разрывов) – полезно в диагностике, дефектоскопии.
- Фрактальный анализ** – вейвлеты позволяют оценить характеристики фрактальных (самоподобных на разных масштабах) процессов.
- Анализ нестационарных процессов** – турбулентность, ветровая нагрузка.



8. Выбор вейвлета

- **Вейвлет Хаара** – простейший, прямоугольный. Хорош для сигналов со ступеньками, но не гладкий. Имеет компактный носитель.
- **Добеши (dbN)** – семейство ортогональных вейвлетов с компактным носителем. Чем больше N, тем глаже, но длиннее носитель. Используется в JPEG2000.
- **Симлеты (symN)** – почти симметричная версия Добеши.
- **Койфлеты (coifN)** – более симметричны, хороши для анализа сигналов.
- **Морле (Morlet)** – непрерывный вейвлет, используется в CWT для частотно-временного анализа.

Как выбирать?

- Для **сжатия** – ортогональные вейвлеты с компактным носителем (db, sym).
- Для **денойзинга** – db или sym с уровнем разложения 3-5.
- Для **обнаружения особенностей** – вейвлеты с хорошей локализацией (db4, db6).
- Для **анализа** – непрерывные вейвлеты (Morlet, Mexican Hat).