Кинетическое описание плазмы

Модель N тел

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i$$

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} \equiv \frac{d\gamma_i m_i \vec{v}_i}{dt} = q_i \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \left[\vec{v}_i \times \vec{B} \right] \right)$$

$$\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_i}{c}\right)^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{p_i}{m_i c}\right)^2}$$

Гамильтоновость

Для электростатической системы

$$H = \sum_i \sqrt{\left(m_i c^2\right)^2 + \left(p_i c\right)^2} + \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|} + \sum_i q_i \Phi_{\text{внеш}}(\vec{r}_i)$$

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i}$$

$$\dot{\vec{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}_i}$$

Можно обобщить на полностью электродинамическую систему

Кинетическая модель

Функция распределения

- $\mathbf{x} \equiv (\vec{r}_i, \vec{p}_i)$ — 6N-мерное фазовое пространство
- $\rho\,(t, \mathbf{x})$ — функция распределения, плотность вероятности обнаружить систему в фазовом объёме $d\mathbf{x} \equiv d\vec{r}_i d\vec{p}_i$

Теорема Лиувилля

$$\frac{d\rho}{dt} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial \vec{r}_i} \frac{d\vec{r}_i}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial \vec{p}_i} \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \{H \rho\} = 0$$

$\{\cdot\cdot\}$ — скобки Пуассона

$$\{fg\} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{p}_i} \frac{\partial g}{\partial \vec{r}_i} - \frac{\partial g}{\partial \vec{p}_i} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}_i} \right)$$

- Если $\rho\left(t, \mathbf{x}\right)$ — плотность абстрактной жидкости в фазовом пространстве, то теорема Лиувилля утверждает, что эта жидкость несжимаема.

Доказательство

Закон сохранения числа частиц (уравнение непрерывности):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}_{\mathrm{6N}}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} \left(\rho \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial \vec{p}_i} \left(\rho \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right) \right) =$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial \vec{r}_i} \frac{d\vec{r}_i}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial \vec{p}_i} \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right) + \rho \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial \vec{p}_i} \left(\frac{d\vec{p}_i}{dt} \right) \right)$$

$$\sum_i \left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial \vec{p}_i} \left(\frac{d\vec{p}_i}{dt} \right) \right) = \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i} \right) - \frac{\partial}{\partial \vec{p}_i} \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{r}_i} \right) \right) = 0$$

Цепочка Боголюбова

- $F_n(t, \vec{r}_1, \vec{p}_1, \ldots, \vec{r}_n, \vec{p}_n)$ — n-частичная функция распределения

$$F_n \equiv \int \rho(t, \vec{r}_1, \vec{p}_1, \ldots, \vec{r}_N, \vec{p}_N) d\vec{r}_{n+1} d\vec{p}_{n+1} \ldots d\vec{r}_N d\vec{p}_N$$

Из уравнения Лиувилля:

$$\frac{\partial F_n}{\partial t} + \{H_n F_n\} = \sum_{i=1}^{n} (N-n) \frac{\partial}{\partial \vec{p}_i} \int \frac{\partial \Phi_{in+1}}{\partial \vec{r}_i} F_{n+1} \, d\vec{r}_{n+1} d\vec{p}_{n+1}$$

$$\Phi_{in+1} \equiv \frac{q_i q_{n+1}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_{n+1}|}$$

Для 1-частичной функции распределения:

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \frac{\partial F_1}{\partial \vec{r}} + q_i \frac{d\Phi_{\text{сред}}}{d\vec{r}} \frac{\partial F_1}{\partial \vec{p}} = \frac{N}{V} \int \hat{\Theta}_{12} F_2 \left(\vec{r}, \vec{p}, \vec{r}_2, \vec{p}_2\right) d\vec{r}_2 d\vec{p}_2$$

$$\hat{\Theta}_{12} \equiv \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \vec{r}} \frac{\partial}{\partial \vec{p}} + \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \vec{r}_2} \frac{\partial}{\partial \vec{p}_2}$$

Уравнение Власова

- Пренебрегаем столкновениями
- $f_s(t, \vec{r}, \vec{p})$ — одночастичная функция распределения для каждой фракции
- Поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ — усреднённые, самосогласованные

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{\gamma m_s}\frac{\partial f_s}{\partial \vec{r}} + q_s\left(\vec{E} + \frac{1}{\gamma m_s c}\left[\vec{p} \times \vec{B}\right]\right)\frac{\partial f_s}{\partial \vec{p}} = 0$$

$$\gamma = \sqrt{1 + \left(\frac{p}{m_s c}\right)^2}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mathrm{rot}\vec{B} - \frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad \mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\varrho$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\vec{E} \qquad \mathrm{div}\vec{B} = 0$$

Моменты 1-частичной функции распределения

- 0-й момент: концентрация частиц (скаляр)

$$n_s(t, \vec{r}) = \int f_s(t, \vec{r}, \vec{p})d\vec{p}$$

- Плотность заряда

$$\varrho(t, \vec{r}) = \sum_s q_s n_s(t, \vec{r})$$

- 1-й момент: плотность импульса (вектор)

$$n_s\vec{P}_s(t, \vec{r}) = \int \vec{p} f_s(t, \vec{r}, \vec{p})d\vec{p}$$

- Гидродинамическая (усреднённая) скорость

$$\vec{u}_s(t, \vec{r}) = \frac{1}{n_s(t, \vec{r})}\int \frac{\vec{p}}{m_s\sqrt{1 + (p/m_s c)^2}} f_s(t, \vec{r}, \vec{p})d\vec{p}$$

- Плотность тока

$$\vec{j}(t, \vec{r}) = \sum_s q_s n_s(t, \vec{r})\vec{u}_s(t, \vec{r})$$

- 2-й момент: плотность потока импульса (тензор)

$$\Pi_s^{ij}(t,\vec{r}) = \frac{1}{m_s}\int p^i p^j f_s(t,\vec{r},\vec{p})d\vec{p}$$

- Тензор давления

$$\mathbb{P}_s^{ij}(t,\vec{r}) = \frac{1}{m_s}\int \left(p^i - P_s^i\right)\left(p^j - P_s^j\right) f_s(t,\vec{r},\vec{p})d\vec{p}$$

- Давление (скаляр)

$$\mathcal{P}_s = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}\hat{\mathbb{P}} \equiv \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\mathbb{P}^{ii} \equiv \frac{1}{3m_s}\int \left|\vec{p} - \vec{P}_s\right|^2 f_s(t,\vec{r},\vec{p})d\vec{p}$$

- Давление (скаляр)

$$\mathcal{P}_s = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}\hat{\mathbb{P}} \equiv \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\mathbb{P}^{ii} \equiv \frac{1}{3m_s}\int \left|\vec{p} - \vec{P}_s\right|^2 f_s(t,\vec{r},\vec{p})d\vec{p}$$

- Плотность энергии (скаляр)

$$w_s = \int \frac{1}{2m_s}\left|\vec{p} - \vec{P}_s\right|^2 f_s(t,\vec{r},\vec{p})d\vec{p}$$

- Уравнение состояния

$$\mathcal{P}_s = \frac{2}{3}w_s = \frac{2}{3}n_s\frac{3}{2}kT_s = n_s kT_s$$

Интеграл столкновений

- Аппроксимируем интеграл от 2-частичной функции распределения неким функционалом (называемым интегралом столкновений) от 1-частичной функции

$$\frac{df_s}{dt} = \sum_p Q(f_s, f_p)$$

- Это уравнение принято называть кинетическим уравнением Больцмана

- Конкретный вид Q определяется из физических соображений и использованных приближений

- Если столкновения упругие, то есть сохраняют импульс и энергию, и обусловлены действием центрально-симметричных сил, то в нерелятивистском пределе в самом общем виде интеграл столкновений может быть записан в виде

$$Q \equiv \frac{1}{m_s} \iint B\left(\left|\vec{p}_s - \vec{p}_p\right|, \vartheta\right) \left[f_s(\vec{p}_s + \vec{q}) f_p(\vec{p}_p - \vec{q}) - f_s(\vec{p}_s) f_p(\vec{p}_p)\right] d\vec{p}_p d\vec{q}$$

$$\cos\vartheta = \frac{\left(\vec{p}_s - \vec{p}_p\right) \cdot \left(\vec{p}_s - \vec{p}_p + 2\vec{q}\right)}{\left|\vec{p}_s - \vec{p}_p\right|^2}$$

- $\vec{q}$ — импульс, передаваемый от одной частицы другой, ϑ — угол рассеяния

- $B(v, \vartheta)$ называют ядром, и его вид определяется физическим механизмом столкновения

- Интеграл в таком виде сохраняет число частиц, полный импульс и энергию системы.

τ-приближение (Bhatnagar, Gross, Krook)

$$Q(f_s, f_p) = \frac{1}{\tau_s}(f_s - f_{s0})$$

$$f_{s0} \sim \exp\left(-\frac{p^2}{2m_s kT}\right)$$

Кулоновский интеграл

$$B\left(\left|\vec{v}_s - \vec{v}_p\right|, \vartheta\right) d\vec{q} = \left|\vec{v}_s - \vec{v}_p\right| d\sigma\left(\left|\vec{v}_s - \vec{v}_p\right|, \vartheta\right)$$

- $d\sigma(v, \vartheta)$ — дифференциальное сечение рассеяния

- формула Резерфорда:

$$d\sigma(v, \vartheta) = \left(\frac{q_s q_p}{2\mu_{sp} v^2}\right)^2 \frac{d\omega}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}}$$

- q_s, q_p — электрические заряды сталкивающихся частиц
- $\mu_{sp} = m_s m_p/(m_s + m_p)$ — приведённая масса
- $d\omega = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ — единичный телесный угол

- При интегрировании по углам — логарифмически расходится

Интеграл Ландау:

- Особенность плазмы:
  - дальнодействие электростатических сил $\sim \frac{1}{r^2}$
  - условие идеальности (мало сильных столкновений) $\iff$ малая экранировка (много слабых столкновений)

$$\frac{e^2}{r} \ll m_e v^2$$

$$n_e r_D^3 \sim n_e \left(\frac{T_e}{e^2 n_e} \right)^{3/2} = \left(\frac{T_e}{e^2 n_e^{1/3}} \right)^{3/2} \sim \left(\frac{m_e v^2 r}{e^2} \right)^{3/2} \gg 1$$

- В малоугловом приближении столкновения приводят к диффузии в импульсном пространстве:

$$\frac{df_s}{dt} = -\nabla_{\vec{p}} \vec{I}$$

$$I_i = \sum_j 2\pi (q_s q_p)^2 L J_{ij}$$

$$J_{ij} = \int \left(f_s \frac{\partial f_p}{\partial p_{pj}} - f_p \frac{\partial f_s}{\partial p_{sj}} \right) \frac{\left| \vec{v}_s - \vec{v}_p \right|^2 \delta_{ij} - (v_{si} - v_{pi})(v_{sj} - v_{pj})}{\left| \vec{v}_s - \vec{v}_p \right|^3} d\vec{p}_p$$

- $L = \ln\left(\frac{1}{\vartheta_{\min}}\right)$ — кулоновский логарифм, $\vartheta_{\min}$ — минимальный угол отклонения частицы при сохранении кулоновского характера столкновения

$L = \ln\left(\frac{1}{\vartheta_{\min}}\right)$

- $\vartheta_{\min} \sim \frac{|q_s q_p|}{\mu_{sp} v^2 r_D}$ — при дебаевском характере экранировки в классическом случае, когда $E_{\mathrm{kin}} \ll |q_s q_p| / \lambda_{\mathrm{dB}}$: $|q_s q_p| \gg \hbar v$; соответствует прицельному параметру порядка радиуса Дебая

- $\vartheta_{\min} \sim \frac{\hbar}{\mu_{sp} v r_D}$ — в квантовом случае, когда $|q_s q_p| \ll \hbar v$; соответствует прицельному параметру порядка длины волны де Бройля

Свойства уравнения Власова

Несжимаемость фазового объёма

$$\frac{df}{dt} = 0$$

Принцип максимума

$$0 \le f(\vec{r}, \vec{p}, t) \le \max_{\vec{r}, \vec{p}} f(\vec{r}, \vec{p}, 0)$$

Законы сохранения

- Сохранение L^p-норм

$$\frac{d}{dt}\left(\int f_s^p d\vec{r} d\vec{p}\right) = 0$$

$$p = 1, 2, \ldots$$

В электростатическом случае в отсутствии внешних полей:

- Закон сохранения импульса:

$$\frac{d}{dt}\sum_s \left(\int \vec{p} f_s d\vec{r} d\vec{p}\right) = 0$$

- Закон сохранения энергии:

$$\frac{d}{dt}\sum_s \left(\int (\gamma m_s c^2 + q_s \Phi(\vec{r})) f d\vec{r} d\vec{p}\right) = 0$$

Дивергентная форма

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{\gamma m}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + q\left(\vec{E} + \frac{1}{\gamma m c}\left[\vec{p} \times \vec{B}\right]\right)\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial \vec{r}} = 0 \implies \frac{\vec{p}}{\gamma m}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \equiv \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(\frac{f\vec{p}}{\gamma m}\right)$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{p}} = 0,\ \frac{\partial}{\partial \vec{p}}\left[\frac{\vec{p}}{\gamma m c} \times \vec{B}\right] = 0 \implies$$

$$q\left(\vec{E} + \frac{1}{\gamma m c}\left[\vec{p} \times \vec{B}\right]\right)\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \equiv q\frac{\partial}{\partial \vec{p}}\left(f\left(\vec{E} + \frac{1}{\gamma m c}\left[\vec{p} \times \vec{B}\right]\right)\right)$$

$$\vec{A} = \left(\frac{\vec{p}}{\gamma m}, q\vec{E} + \frac{q}{\gamma m c}\left[\vec{p} \times \vec{B}\right]\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\vec{r}, \vec{p}}\left(\vec{A} f\right) = 0$$

Что почитать

- Ландау, Лифшиц. *Курс теоретической физики*, том 5, § 1—3
- Лифшиц, Питаевский. *Курс теоретической физики*, том 10, § 3, 16, 41
- Климонтович. *Статистическая теория неравновесных процессов в плазме*
- Климонтович. *Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы*, Главы 1, 2, 5-7
- Климонтович. *Кинетическая теория электромагнитных процессов*, Глава 1, § 1—10, Глава 3, § 1—5
- Eric Sonnendrücker. *Numerical methods for the Vlasov equations*. Lecture notes. 2013.
- G. Dimarco, L. Pareschi. Numerical methods for kinetic equations. Acta Numerica, Cambridge University Press (CUP), 2014, pp. 369-520.
- P. Degond. *Macroscopic limits of the Boltzmann equation: a review* // Modeling and Computational Methods for Kinetic Equations. Ed. P. Degond, L. Pareschi, G. Russo. 2004. P. 3.

Дома

- Доказать:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v_i}{c}\right)^2}} = \sqrt{1+\left(\frac{p_i}{m_i c}\right)^2}$$

- Доказать:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{p}}\left[\frac{\vec{p}}{\gamma m c} \times \vec{B}\right] = 0$$