Методы поиска точных решений уравнения Власова

Метод характеристик

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{A} \cdot \nabla_{\vec{r},\vec{p}} f = 0$$

$$\mathbf{A} = \left\{ \frac{\vec{p}}{\gamma m}, q\vec{E} + \frac{q}{\gamma mc}\left[\vec{p} \times \vec{B}\right] \right\}$$
$$\nabla_{\vec{r},\vec{p}} \equiv \left\{ \frac{\partial}{\partial \vec{r}}, \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \right\}$$

- Это уравнение переноса в 6-мерном пространстве со скоростью $\mathbf{A}$

Характеристики

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{X}, t)$$
$$\mathbf{X}(s) = \{\vec{r}, \vec{p}\} \equiv \mathbf{x}$$

- $\mathbf{X}(t; s, \mathbf{x})$ — характеристики уравнения переноса (траектории частиц в фазовом пространстве)

Свойства характеристик

- Транзитивность:

$$\mathbf{X}\left(t3; t2, \mathbf{X}(t2; t1, \mathbf{x})\right) = \mathbf{X}(t3; t1, \mathbf{x})$$

- Отображение $\mathbf{x} = \mathbf{X}(t; s, \mathbf{y})$ — диффеоморфизм (взаимно однозначное и гладкое) по отношению к $\mathbf{y} = \mathbf{X}(s; t, \mathbf{x})$

- Если $\nabla \mathbf{A} = 0$, то якобиан отображения:

$$J(t; s) \equiv \det(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{X}(t; s, \mathbf{x})) = 1$$

- Характеристики дают решение исходного дифференциального уравнения:

$$f(t, \mathbf{x}) = f_0\left(\mathbf{X}(0; t, \mathbf{x})\right)$$

Пример: Свободный одномерный поток

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

- Уравнения характеристик:

$$\frac{dX}{dt} = V$$

$$\frac{dV}{dt} = 0$$

- Уравнения характеристик:

$$\frac{dX}{dt} = V$$

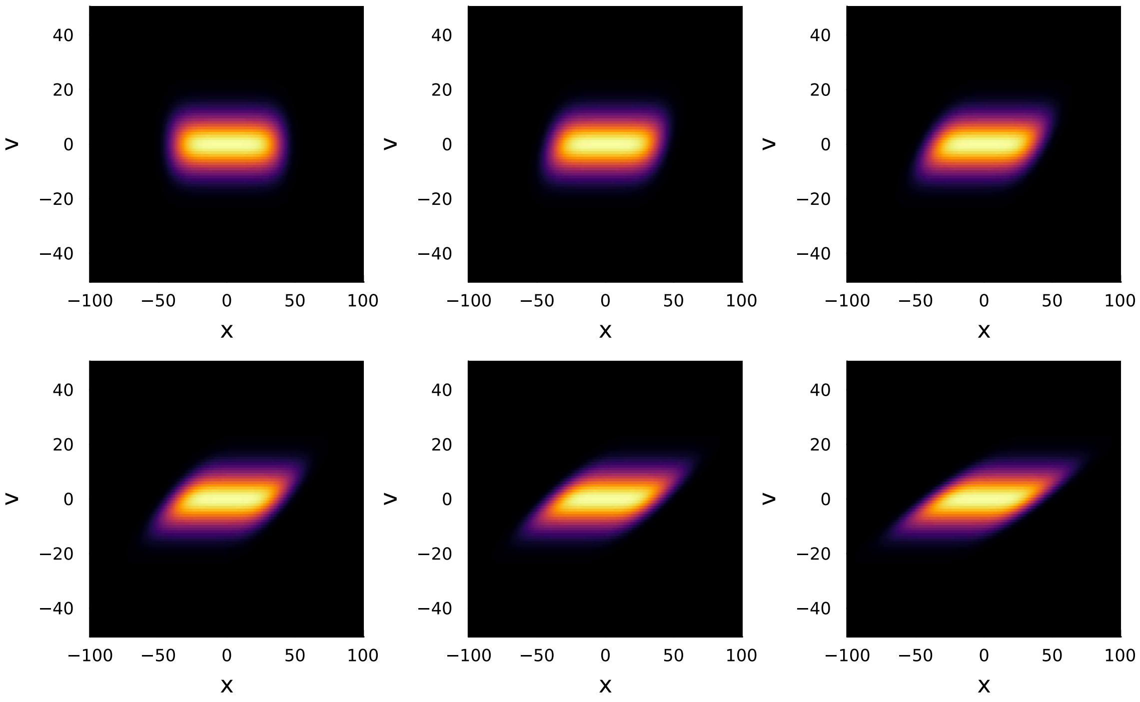
$$\frac{dV}{dt} = 0$$

- Их решение:

$$\begin{aligned} V(t; s, x, v) &= v \\ X(t; s, x, v) &= x + v(t - s) \end{aligned}$$

- Решение исходного уравнения:

$$f(x, v, t) = f_0(x - vt, v)$$



Пример: Электронный пучок вблизи нуля линейно нарастающего поля

- Имеем внешнее поле:

$$E = -x$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

- Уравнения характеристик:

$$\frac{dX}{dt} = V$$

$$\frac{dV}{dt} = -X$$

- Уравнения характеристик:

$$\frac{dX}{dt} = V$$

$$\frac{dV}{dt} = -X$$

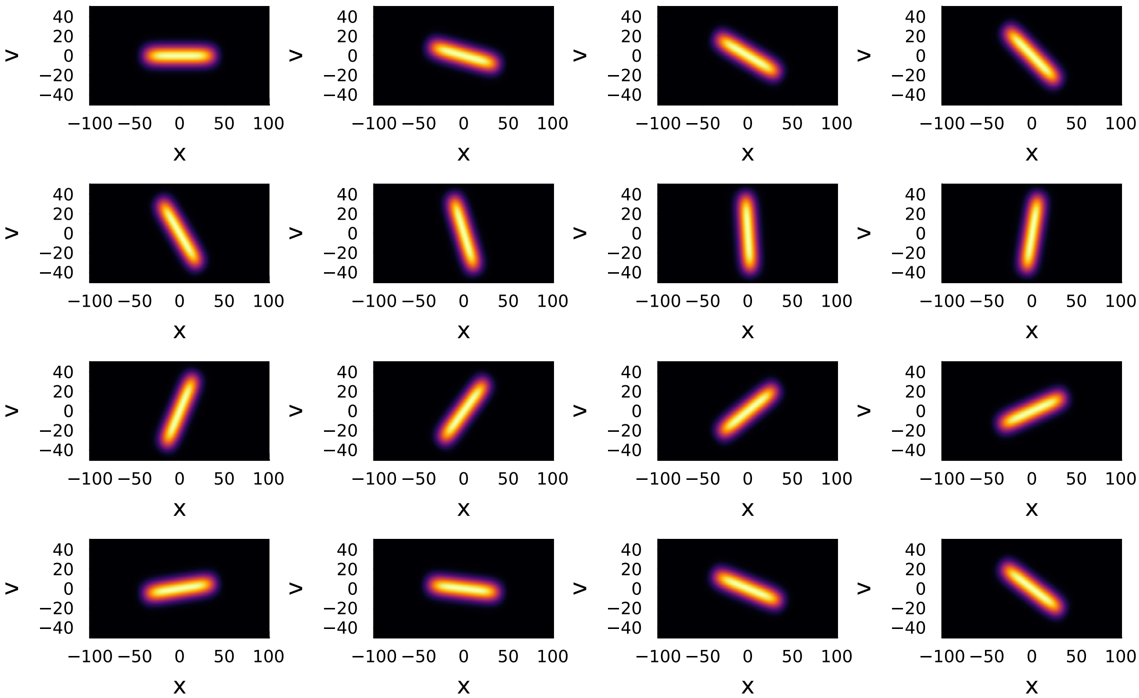
- Их решение:

$$V(t; s, x, v) = v\cos(t-s) - x\sin(t-s)$$

$$X(t; s, x, v) = x\cos(t - s) + v\sin(t - s)$$

- Решение исходного уравнения:

$$f(x, v, t) = f_0(x\cos t - v\sin t, v\cos t + x\sin t)$$



Метод интегралов движения для уравнения Власова

- В стационарном случае траектория движения частицы в 6-мерном пространстве может быть задана 5-ю интегралами движения (первыми интегралами системы уравнений Гамильтона) $\{\mathcal{I}_1(\vec{r}, \vec{p})\ \mathcal{I}_2(\vec{r}, \vec{p}) \dots \mathcal{I}_5(\vec{r}, \vec{p})\}$:

$$f(t, \vec{r}, \vec{p}) \equiv g(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \dots \mathcal{I}_5)$$

- Эффективно при высокой степени симметрии задачи:
  - Часть интегралов — аддитивные, связанным с симметрией (энергия, обобщённый импульс)
  - От остальных интегралов функция не зависит

- Если не удаётся найти все интегралы, то известные позволяют понизить количество переменных

- В качестве приближённых интегралов могут выступать адиабатические инварианты

Энергетическая подстановка

- В стационарном случае всегда сохраняется энергия (сама функция Гамильтона)

- В одномерном случае в отсутствии магнитного поля и поперечных электрических полей это позволяет полностью исключить уравнение Власова

- $f(\vec{r}, \vec{p}) \equiv f(x, p_x)$

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + q\phi(x)$$

- $\phi(x)$ — электростатический потенциал

$$f(x, p_x) = g(H)$$

$$\begin{aligned} \frac{p_x}{m}\frac{\partial f}{\partial x} - q\frac{d\phi}{dx}\frac{\partial f}{\partial p_x} &= \frac{p_x}{m}\frac{dg}{dH}\frac{\partial H}{\partial x} - q\frac{d\phi}{dx}\frac{dg}{dH}\frac{\partial H}{\partial p_x} = \\ &= \frac{p_x}{m}\frac{dg}{dH}q\frac{d\phi}{dx} - q\frac{d\phi}{dx}\frac{dg}{dH}\frac{p_x}{m} = 0 \end{aligned}$$

- Распределение поля и плазмы в пространстве будет определяться решением уравнения Пуассона:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -4\pi\sum_s \int\limits_{-\infty}^{+\infty} q_s f_s(x, p_x) dp_x = -4\pi\sum_s \int\limits_{-\infty}^{+\infty} q_s g_s(H(x, p_x)) dp_x$$

Пример: плоский дебаевский слой

- Ионы будем считать неподвижными и равномерно распределёнными в $x \leq 0$:

$$N_i(x) = N_{i0}\Theta(-x)$$

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \iff x \geq 0 \\ 0 & \iff x < 0 \end{cases}$$

- Уравнение Пуассона принимает вид:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -4\pi e\left(N_i(x) - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(H(x, p_x)) dp_x\right)$$

- Пусть электроны распределены по закону Больцмана — Максвелла:

$$g(H) = \frac{N_{e0}}{\sqrt{2\pi m_e T}} \exp\left\{-\frac{H}{T}\right\}$$

- N_{e0} — фоновая концентрация электронов в области, где потенциал равен нулю

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -4\pi e \left(N_i(x) - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_{e0}}{\sqrt{2\pi m_e T}} \exp\left\{-\frac{p_x^2}{2mT} + \frac{e\phi}{T}\right\} dp_x \right) =$$
$$= -4\pi e \left(N_i(x) - N_{e0} \exp\left\{\frac{e\phi}{T}\right\}\right)$$

- Если потенциал спадает к нулю внутри плазмы, то $N_{i0} = N_{e0}$

- Безразмерные переменные:

$$\varphi = \frac{e\phi}{T}$$
$$\xi = x\left(\frac{4\pi e^2 N_{e0}}{T}\right)^{\frac{1}{2}} \equiv \frac{x}{r_D}$$

- r_D — радиус Дебая

- Получаем:

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} = e^{\varphi} - \Theta(-x)$$

- Это нелинейное уравнение, не имеющее аналитического решения

- Рассмотрим область $x > 0$:

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} = e^{\varphi}$$

- Обозначим $y = d\varphi/d\xi$ и перепишем:

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = y$$
$$\frac{dy}{d\xi} = e^{\varphi}$$

- Поделим и получим:

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{e^\varphi}{y}$$
$$y dy = e^\varphi d\varphi$$
$$y^2 - 2e^\varphi = C$$

- $C = 0$ (в области где поле $E = -d\phi/dx$ отсутствует, потенциал устремляется в бесконечность: $\varphi \to -\infty$ при $y = 0$)

$$y^2 = 2e^\varphi$$
$$y_\pm = \pm\sqrt{2}\exp\left\{\frac{\varphi}{2}\right\}$$
$$\frac{d\varphi_\pm}{d\xi} = \pm\sqrt{2}\exp\left\{\frac{\varphi}{2}\right\}$$
$$\frac{d\varphi_\pm}{\exp\{\varphi/2\}} = \pm\sqrt{2}d\xi$$
$$-2\exp\left\{-\frac{\varphi_\pm}{2}\right\} = \pm\sqrt{2}(\xi - \xi_0)$$
$$\varphi_\pm = -2\ln\left\{\mp\frac{\xi - \xi_0}{\sqrt{2}}\right\}$$

- φ_- определено в области $\xi > \xi_0$, φ_+ — в области $\xi < \xi_0$. Поскольку мы ищем решение во всей области $\xi > 0$, выберем решение φ_-

$$N_e = N_{e0}\exp\left\{\frac{e\phi}{T}\right\} = \frac{2N_{e0}}{(\xi - \xi_0)^2}$$

- Рассмотрим теперь область $x \leq 0$:

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} = e^\varphi - 1$$

- Проинтегрируем один раз аналогично случаю $x > 0$:

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = y$$
$$\frac{dy}{d\xi} = e^\varphi - 1$$
$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{e^\varphi - 1}{y}$$
$$y dy = (e^\varphi - 1)\, d\varphi$$
$$y^2 - 2e^\varphi + 2\varphi = C$$

- В глубине плазмы ($x \to -\infty$) поле и потенциал спадают до нуля: $\varphi \to 0$, $y \to 0$, следовательно, $C = -2$

- Получаем:

$$\frac{d\varphi_\pm}{d\xi} = \pm\sqrt{2}(e^{\varphi_\pm} - \varphi_\pm - 1)^{\frac{1}{2}}$$

- Его решение надо сшить с решением уравнения в области $x > 0$. Выберем в качестве решения снова φ_- и приравняем выражения для y^2 в точке $x = 0$:

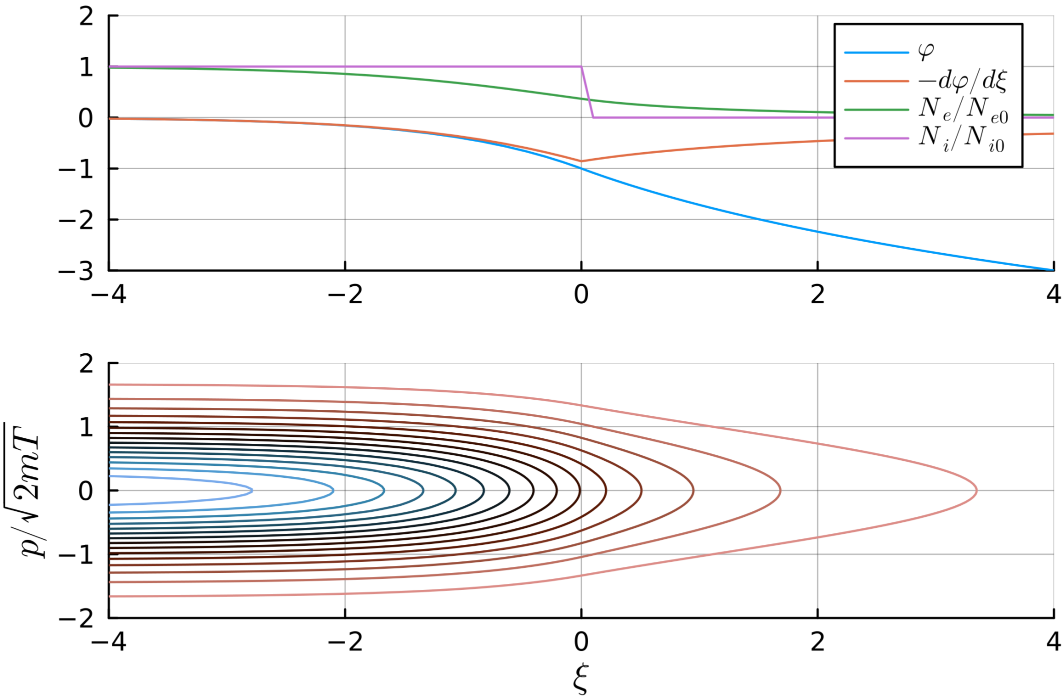
$$2e^{\varphi_0} = 2\left(e^{\varphi_0} - \varphi_0 - 1\right)$$

- $\varphi_0 \equiv \varphi(0)$

- Получаем $\varphi_0 = -1$. Его следует использовать в качестве граничного условия при численном решении уравнения

- Найдём также ξ_0:

$$\varphi_0 = -2\ln\left\{-\frac{\xi_0}{\sqrt{2}}\right\}$$
$$\xi_0 = -\sqrt{2}e^{-\varphi_0/2} = -\sqrt{2e}$$



Что почитать

- Bertrand, Del Sarto, Ghizzo. *The Vlasov Equation 1: History and General Properties*, Chapter 5

- Eric Sonnendrücker. *Numerical methods for the Vlasov equations*. Lecture notes. 2013.
- G. Dimarco, L. Pareschi. Numerical methods for kinetic equations. Acta Numerica, Cambridge University Press (CUP), 2014, pp. 369-520.
- P. Degond. *Macroscopic limits of the Boltzmann equation: a review* // Modeling and Computational Methods for Kinetic Equations. Ed. P. Degond, L. Pareschi, G. Russo. 2004. P. 3.

Дома

- Методом характеристик решить задачу о динамике плазмы во внешнем однородном магнитном поле:

$$f \equiv f(t, v_x, v_y)$$
$$\vec{B} = \vec{z}_0 B_0$$
$$f(0, v_x, v_y) = F(v_x, v_y)$$