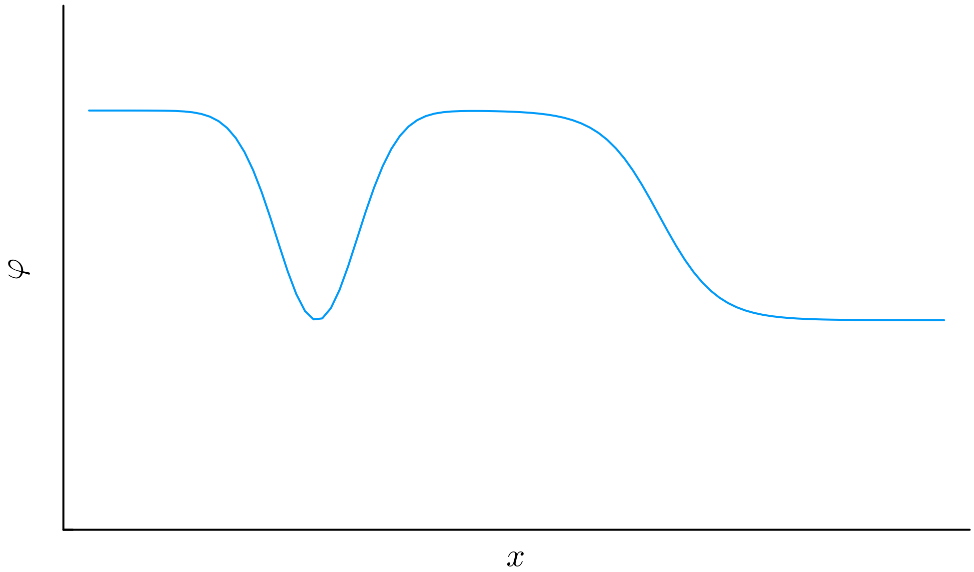
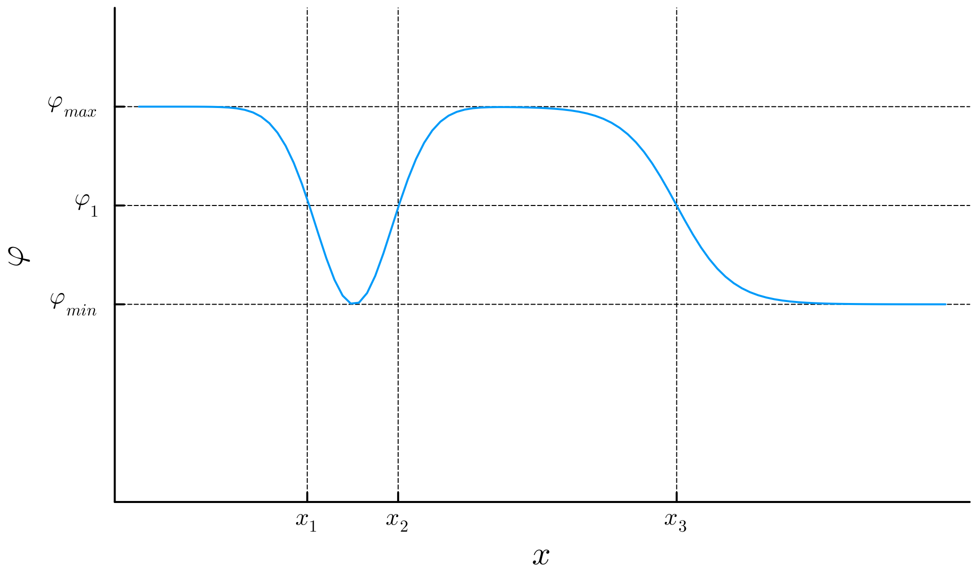
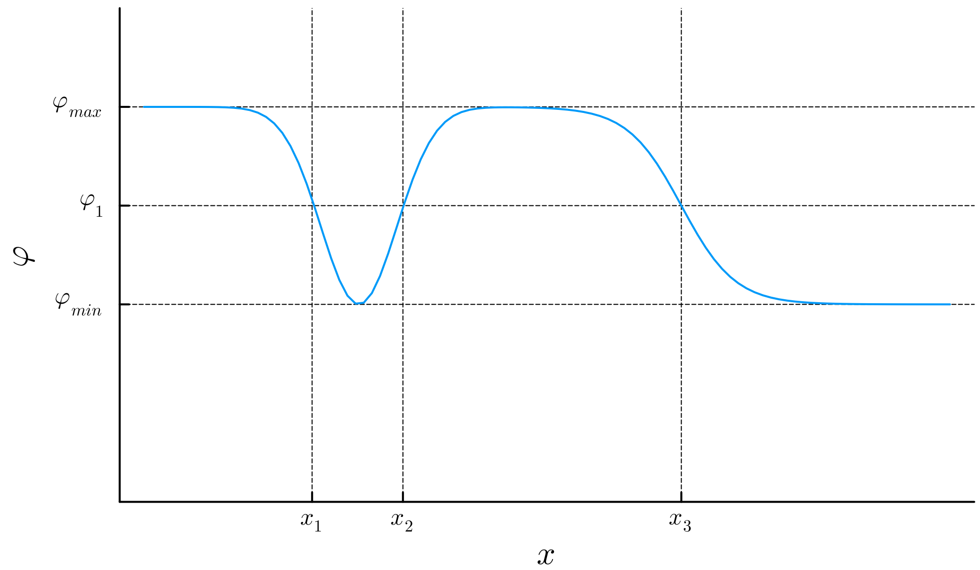
Методы поиска точных решений уравнения Власова

Нелинейные моды Бернстейна — Грина — Крускала (БГК)





- Для ионов:
  - $E_+ < q\varphi_{\min}$ не могут существовать
  - $q\varphi_{\min} < E_+ < q\varphi_{\max}$ совершают финитное движение в области $x_1 < x < x_2$ и инфинитное в области $x > x_3$
  - $E_+ > q\varphi_{\max}$ движение ничем не ограничено



- Для электронов:
  - $E_- < -e\varphi_{\max}$ не могут существовать
  - $-e\varphi_{\max} < E_- < -e\varphi_{\min}$ совершают финитное движение в области $x_2 < x < x_3$ и инфинитное в области $x < x_1$
  - $E_- > -e\varphi_{\min}$ движение ничем не ограничено

- Частицы, совершающие финитное движение, называют захваченными.
- Их функция распределения в изолированных друг от друга областях может отличаться (но в отсутствии потерь должна быть симметричной относительно $p_x = 0$)

Аналитическое описание одномерных мод БГК

- Исходные уравнения:
  - Одномерное уравнение Власова

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + v\frac{\partial f_s}{\partial x} + q_s\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f_s}{\partial v} = 0$$

  - Уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -4\pi\rho = -4\pi(q_i n_i - e n_e)$$

- Рассмотрим случай $q_i = e$ и будем считать ионы неподвижным однородным фоном:

$$n_i(x) = n_0$$

- Удобно разбить функцию распределения на пролётные частицы и захваченные частицы:

$$f(t,x,v) = f_{\text{п}}(t,x,v) + f_{\text{з}}(t,x,v)$$

- Введём безразмерные величины:

$$\tilde{x} = \frac{x}{r_{D0}} = x\sqrt{\frac{4\pi e^2 n_0}{T_e}} \qquad n = \frac{n_e}{n_0} \qquad \tilde{\varphi} = \frac{e\varphi}{T_e} \qquad u = \frac{v}{v_{Te}} = v\sqrt{\frac{m_e}{2T_e}}$$

- Будем искать стационарные решения и воспользуемся энергетической подстановкой:

$$f(t,x,v) \equiv g(H) = g(u^2 - \varphi)$$

- Получаем уравнение:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,u)du - 1 = \begin{bmatrix} u = \sqrt{H+\varphi} \\ du = \dfrac{dH}{2\sqrt{H+\varphi}} \end{bmatrix} = \int\limits_{-\varphi}^{+\infty} \frac{g(H)dH}{2\sqrt{H+\varphi}} - 1$$

- Существует два основных подхода к решению:
  - Интегральный или метод БГК
  - Дифференциальный или метод классического (или псевдо-) потенциала Сагдеева — Шамеля

Интегральный метод БГК

- Начинаем с заданной функции $\varphi(x)$. Тогда распределение электронов в пространстве известно:

$$n_e(x) = 1 + \frac{d^2\varphi}{dx^2}$$

- Выразим концентрацию как функцию потенциала (если она многозначна, надо рассмотреть каждую ветку — то есть каждую яму — отдельно):

$$n_e = n_e(\varphi)$$

- Задаём распределение пролётных частиц $g_{\text{п}}(H)$. Эта функция определена только для $H > -\varphi_{\min}$:

$$g_{\text{п}}(H) = g_0(H)\Theta(H + \varphi_{\min})$$

- где $\Theta(x)$ — функция включения Хевисайда: $\Theta(x) = 1$ при $x > 0$ и $\Theta(x) = 0$ при $x < 0$

- Другими словами:

$$f_{\text{п}}(x, u) = f_0\left(\sqrt{u^2 - \varphi(x) + \varphi_{\min}}\right)$$

- где $f_0(u)$ — заданное распределение в точке минимума потенциала
- $f_{\text{п}}(x, u)$ определена в области $|u| > \sqrt{\varphi(x) - \varphi_{\min}}$

- Получаем:

$$\int\limits_{-\varphi}^{-\varphi_{\min}} \frac{g_{\text{з}}(H)dH}{2\sqrt{H + \varphi}} + \int\limits_{-\varphi_{\min}}^{+\infty} \frac{g_0(H)dH}{2\sqrt{H + \varphi}} = n_e(\varphi)$$

- Обозначим

$$n_{\text{з}}(\varphi) = n_e(\varphi) - \int\limits_{-\varphi_{\min}}^{+\infty} \frac{g_0(H)dH}{2\sqrt{H + \varphi}}$$

- И получаем:

$$\int\limits_{-\varphi}^{-\varphi_{\min}} \frac{g_{\text{з}}(H)dH}{2\sqrt{H + \varphi}} = n_{\text{з}}(\varphi)$$

- Это интегральное уравнение на функцию распределения захваченных частиц $g_{\text{з}}(H)$

- Оно сводится к интегральному уравнению Абеля и решается, например, методом преобразования Лапласа. Решение:

$$g_{\text{з}}(H) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int\limits_{-\varphi_{\min}}^{-H} \frac{dn_{\text{з}}(V)}{dV} \frac{1}{\sqrt{-H - V}} dV$$

- Эта функция определена только для $H < -\varphi_{\min}$

- Ограничения метода:
  - Произвольность выбора $g_{\text{п}}(H)$ и $\varphi(x)$ ограничена требованием $g_{\text{з}}(H) > 0$
  - При неудачном выборе $\varphi(x)$ функция $g_{\text{з}}(H)$ может иметь бесконечную производную (сингулярность) вблизи точек сшивки с функцией $g_{\text{п}}(H)$ —

это, вообще говоря, нефизично. Обычно достаточно задать правильную асимптотику $\varphi(x)$ на бесконечности $\sim \exp(-x)$, что соответствует дебаевской экранировке в плазме для максвелловского распределения по скоростям. Но можно сформулировать и более общее условие

Дифференциальный метод потенциала Сагдеева — Шамеля

- Начинаем с задания функции $g(H)$ или $f(x,u)$. Например, в форме Шамеля:

$$f(x,u) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\left[\pm\sqrt{u^2 - \phi(x)} + U\right]^2\right), \quad H > 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\beta\left[u^2 - \phi(x)\right] - U^2\right), \quad H < 0 \end{cases}$$

- U — скорость потока на бесконечности
- β определяет количество захваченных электронов

- Вводим функцию

$$V(\varphi) = \int\limits_{-\varphi}^{+\infty} 2\sqrt{H + \varphi}\, g(H)\, dH$$

- Получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{dV}{d\varphi}$$

- Это уравнение можно рассматривать как движение вдоль φ в потенциале $V(\varphi)$, поэтому $V(\varphi)$ называют классическим или псевдопотенциалом

- Решение уравнения:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{dV}{d\varphi}$$

$$\frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{dV}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = -\frac{d}{dx}V(\varphi(x))$$

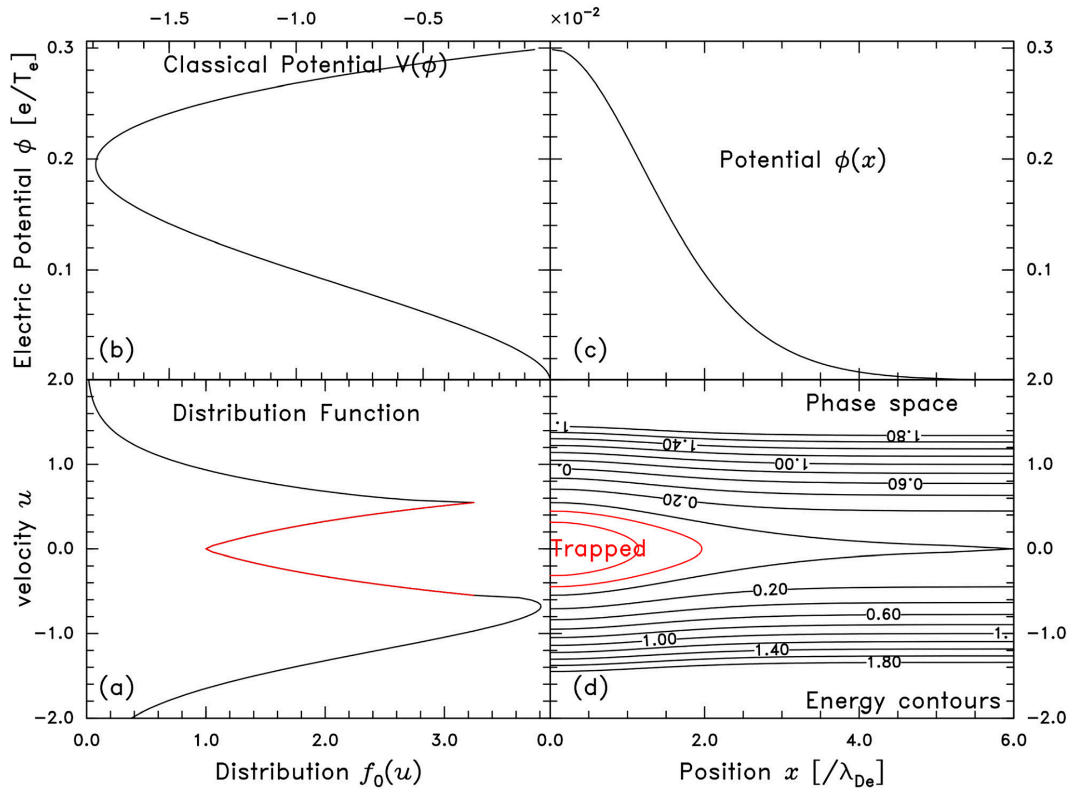
$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + V(\varphi) = C$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \pm\sqrt{C - V(\varphi)}$$

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{C - V(\varphi)}} = \pm dx$$

$$x - x_0 = \pm \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{V(\varphi_0) - V(\varphi)}}$$

- Ищем решение, удовлетворяющее граничным условиям



Нейтральные токовые структуры

- Поперечные токи и самосогласованное с ними магнитное поле

- Разделение зарядов и электростатическое поле отсутствуют

- Функция распределения:

$$f(t, \vec{r}, \vec{p}) \equiv f(x, p_x, p_y, p_z)$$

- Нужны 3 интеграла движения. Ими являются энергия H и две поперечные проекции обобщённого импульса частиц P_y, P_z:

$$\begin{aligned}
&f(x, p_x, p_y, p_z) = g(H, P_y, P_z) \\
&H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) \\
&P_y = p_y + \frac{q}{c}A_y \\
&P_z = p_z + \frac{q}{c}A_z,
\end{aligned}$$

- A_y, A_z — проекции векторного потенциала на соответствующие оси

- Из уравнений Максвелла остаётся теорема о циркуляции тока:

$$\frac{d^2 A_{y,z}}{dx^2} = \frac{4\pi}{c} j_{y,z},$$

- где плотность тока:

$$j_{y,z}(x) = q \iiint \frac{p_{y,z}}{m} f(x, p_x, p_y, p_z) dp_x dp_y dp_z$$

- Получившееся уравнение на векторный потенциал принято называть уравнением Грэда — Шафранова

Пример: токовый слой Харриса

- Токи создаются только электронами и направлены только вдоль оси z: $A_y \equiv 0$, $P_y \equiv p_y$

- Ищем решение для функции распределения в виде:

$$g(H, p_y, P_z) = C \exp\left\{-\frac{H}{T}\right\} \exp\left\{\frac{P_z v}{T}\right\}$$

- Выясним физический смысл скорости v:

$$
\begin{aligned}
f(x, p_x, p_y, p_z) &= C \exp\left\{ -\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2mT} + \frac{(p_z - eA_z/c)v}{T} \right\} = \\
&= C \exp\left\{ -\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - 2(p_z - eA_z/c)mv}{2mT} \right\} = \\
&= C \exp\left\{ -\frac{p_x^2 + p_y^2 + (p_z - mv)^2 - (mv)^2 + 2eA_z mv/c}{2mT} \right\} = \\
&= \tilde{C} \exp\left\{ -\frac{p_x^2 + p_y^2 + (p_z - mv)^2}{2mT} \right\} \exp\left\{ \frac{eA_z v}{cT} \right\},
\end{aligned}
$$

- $\tilde{C} = C \exp\left(-mv^2/2T\right)$
- Таким образом, v играет роль средней скорости электронов (гидродинамической скорости потока) вдоль оси z

- Пусть в области, где $A_z = 0$, концентрация электронов равна N_{e0}, вычислим нормировочную константу:

$$
\begin{aligned}
N_{e0} = \int f d\vec{p} = \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{C} \exp\left\{ -\frac{p_x^2 + p_y^2 + (p_z - mv)^2}{2mT} \right\} dp_x dp_y dp_z = \\
= \tilde{C} (2\pi mT)^{\frac{3}{2}},
\end{aligned}
$$

- Получаем:

$$
C = \tilde{C} \exp\left(\frac{mv^2}{2T} \right) = \frac{N_{e0}}{(2\pi mT)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(\frac{mv^2}{2T} \right)
$$

- Найдём связь плотности тока и векторного потенциала A_z:

$$
\begin{aligned}
j_z = -e \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{p_z}{m} f(x, p_x, p_y, p_z) dp_x dp_y dp_z = \\
= -\frac{eN_{e0}}{m} \exp\left\{ \frac{eA_z v}{cT} \right\} I,
\end{aligned}
$$

- где

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} p_z \exp\left\{-\frac{p_x^2+p_y^2+(p_z-mv)^2}{2mT}\right\}\frac{dp_x dp_y dp_z}{(2\pi mT)^{\frac{3}{2}}} = \\
&= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_z \exp\left\{-\frac{(p_z-mv)^2}{2mT}\right\}\frac{dp_z}{(2\pi mT)^{\frac{1}{2}}} = \\
&= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (p_z-mv) \exp\left\{-\frac{(p_z-mv)^2}{2mT}\right\}\frac{d(p_z-mv)}{(2\pi mT)^{\frac{1}{2}}} + \\
&+ mv\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(p_z-mv)^2}{2mT}\right\}\frac{d(p_z-mv)}{(2\pi mT)^{\frac{1}{2}}} = mv
\end{aligned}
$$

- Получаем:

$$
j_z = -eN_{e0}v\exp\left\{\frac{eA_zv}{cT}\right\}
$$

- Подставим это выражение в теорему о циркуляции тока и получим:

$$
\frac{d^2A_z}{dx^2} = -\frac{4\pi eN_{e0}v}{c}\exp\left\{\frac{eA_zv}{cT}\right\}
$$

- Введём безразмерные величины:

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{eA_zv}{cT} \\
\xi &= x\left(\frac{8\pi e^2N_{e0}}{T}\right)^{1/2}\frac{v}{c} = \frac{x\sqrt{6}}{d_{e0}}\frac{v}{v_T},
\end{aligned}
$$

- где $d_{e0} = c/\omega_{pe0}$ — инерционная электронная длина (глубины плазменного скин-слоя) (ω_{pe0} — электронная плазменная частота)
- $v_T = \sqrt{3T/m}$ — тепловая скорость электронов

- Получаем:

$$
\frac{d^2a}{d\xi^2} = -2e^a
$$

- Обозначим $y = da/d\xi$ и получим:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{d\xi} &= -2e^a \\
\frac{da}{d\xi} &= y
\end{aligned}
$$

- Поделим верхнее на нижнее:

$$ydy = -2e^a da$$
$$y^2 = -4e^a + C$$

- Положим $C = 4$ (в точке, где магнитное поле обращается в нуль ($y = 0$), векторный потенциал также обращается в нуль ($a = 0$))

- Получаем:

$$y^2 = 4(1 - e^a)$$
$$\frac{da}{d\xi} = \pm 2\sqrt{(1 - e^a)}$$
$$\frac{da}{\sqrt{1 - e^a}} = \pm 2d\xi$$

- Рассмотрим интеграл от правой части:

$$\int \frac{da}{\sqrt{1 - e^a}} = \int \frac{e^{-a/2}da}{\sqrt{e^{-a} - 1}} = \left[t = e^{-a/2}\right] = \int \frac{-2dt}{\sqrt{t^2 - 1}}$$
$$= [t = \cosh u] = \int -2du = -2u + C = -2\mathrm{arccosh}\left(e^{-a/2}\right) + C$$

- Таким образом, получаем:

$$-2\mathrm{arccosh}\left(e^{-a/2}\right) + C = \pm 2\xi$$

- Константа C может быть выбрана равной нулю соответствующим выбором начала отсчёта оси x

- Имеем:

$$a = -2\ln\cosh\xi$$

- Найдём распределение магнитного поля:

$$B_y = -\frac{dA_z}{dx} = -\frac{cTd_{e0}}{ev}\frac{da}{d\xi} = \sqrt{8\pi N_{e0}T}\tanh\xi,$$

- распределение плотности тока:

$$j_z = -eN_{e0}v\exp\left\{\frac{eA_zv}{cT}\right\} = -\frac{eN_{e0}v}{\cosh^2\xi}$$

- распределение концентрации:

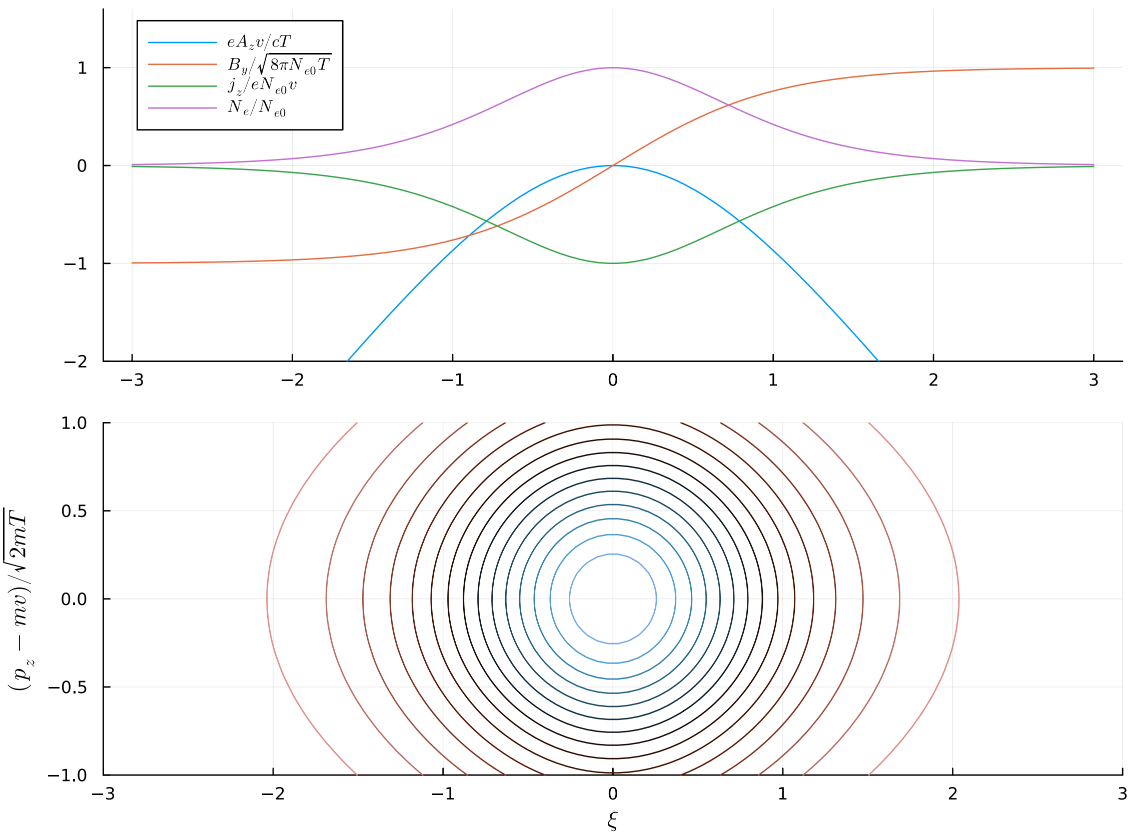
$$N_e = \int f d\vec{p} = N_{e0} \exp\left\{ \frac{eA_z v}{cT} \right\} = \frac{N_{e0}}{\cosh^2 \xi}$$

- Получили токовый плазменный слой, разделяющий области с противоположно направленным магнитным полем

- Физический смысл: в нулевой плоскости ($B_y = 0$) образуется уплотнение плазмы, чтобы кинетическое давление плазмы уравновешивало бы давление магнитного поля:

$$\frac{\left(B_y^\infty\right)^2}{8\pi} = N_{e0}T,$$

- где $|B_y^\infty| = \sqrt{8\pi N_{e0} T}$
- слева стоит выражение для магнитного давления на бесконечности, а справа — выражение для кинетического давления в точке $x = 0$.



Что почитать

- Bertrand, Del Sarto, Ghizzo. *The Vlasov Equation 1: History and General Properties*, Chapter 5

- Кочаровский и др., *Аналитическая теория самосогласованных токовых структур в бесстолкновительной плазме*, Успехи физических наук, Т. 186, С. 1267–1314 (2016)
- Eliasson, Shukla, *Formation and dynamics of coherent structures involving phase-space vortices in plasmas*, Physics Reports, V. 422, P. 225–290 (2006)
- Hutchinson *Electron holes in phase space: What they are and why they matter*, Physics of Plasmas, V. 24, 055601 (2017).

Дома

- Получить уравнения для слоя Харриса с ведущим полем (постоянным по величине полем B_z)