Неустойчивости кинетического типа в гидродинамическом приближении

Двухпотоковая электростатическая неустойчивость

- **Модель:** холодная плазма, электроны двух сортов:
  - Фон: n_1, $v_1 = 0$.
  - Пучок: n_2, $v_2 = u_0$.
  - Ионы: неподвижный нейтрализующий фон.

- **Уравнения (1D):**

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial (n_\alpha v_\alpha)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial v_\alpha}{\partial x} = \frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 4\pi e (n_1 + n_2 - n_i)$$

- **Линеаризация:** $n_\alpha = n_{\alpha 0} + \delta n_\alpha$, $v_\alpha = u_{\alpha 0} + \delta v_\alpha$, $\phi \sim e^{i(kx - \omega t)}$.

- В результате получаем:

$$1 - \frac{\omega_{p1}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{p2}^2}{(\omega - k u_0)^2} = 0,$$

  где $\omega_{p\alpha}^2 = \frac{4\pi e^2 n_{\alpha 0}}{m}$.

- **Симметричный случай** $n_{10} = n_{20} = n_0/2$:

$$1 - \frac{\omega_p^2/2}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2/2}{(\omega - k u_0)^2} = 0, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m}.$$

- при $u_0 \neq 0$ появляются комплексные корни ω.

- **Неустойчивость** возникает для $k < k_{\text{крит}}$, где $k_{\text{крит}} = 2\omega_p / u_0$.

- **Максимальный инкремент**:

$$\gamma_{\max} \approx \omega_p.$$

Сравнение с кинетическим описанием

Характеристика	Кинетическое описание	Гидродинамическое описание
Дисперсионное уравнение	$1+\frac{\omega_p^2}{k^2v_T^2}W\left(\frac{\omega}{kv_T}\right)=0$	$1-\frac{\omega_p^2/2}{\omega^2}-\frac{\omega_p^2/2}{(\omega-ku_0)^2}=0$
Усиливаемые волны	$\frac{\partial f_0}{\partial v}\Big\|_{v=\omega_p/k}<0$	$k<2\omega_p/u_0$
Максимальный инкремент	$\gamma\approx\omega_p$	$\gamma\approx\omega_p$
Частицы, участвующие в усилении	Вблизи резонанса	Все
Насыщение	Захват частиц в потенциальные ямы	Захват частиц в потенциальные ямы

Двухпотоковая электромагнитная неустойчивость (филаментационная)

- **Модель:** те же два потока электронов, но рассматриваются **поперечные** возмущения (электромагнитное поле).

- **Уравнения:**

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t}+\frac{\partial(n_\alpha v_\alpha)}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial v_\alpha}{\partial t}+v_\alpha\frac{\partial v_\alpha}{\partial x}=\frac{e}{m}\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=4\pi e(n_1+n_2-n_i),\qquad \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}=\frac{4\pi}{c}e(n_1v_1+n_2v_2)$$

- **Дисперсионное соотношение** при $n_1=n_2$, $u_1=-u_2=u_0$:

$$\frac{c^2k^2}{\omega^2}=1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\left(1-\frac{k^2u_0^2}{\omega^2}\right).$$

- **Неустойчивость** возникает для всех k.

- **Максимальный инкремент** для $k\approx c/\omega_p$:

$$\gamma_{\max}\approx\omega_p.$$

Бимаксвелловское распределение и тензор давления

- **Эволюция тензора давления** (бесстолкновительная плазма):

$$\frac{dP_{ij}}{dt} + P_{ik}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + P_{jk}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + P_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial Q_{ijk}}{\partial x_k} = \frac{q}{m}\left(\varepsilon_{ilm}B_l P_{mj} + \varepsilon_{jlm}B_l P_{mi}\right).$$

- **Предположения:**
  - Однородная плазма, $\nabla P^{(0)} = 0$.
  - Пренебрегаем тепловым потоком ($Q_{ijk} = 0$) – замыкание на уровне второго момента.
  - Рассматриваем малые возмущения полей $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ и тензора давления.

- **Линеаризация** уравнений непрерывности, движения, эволюции P_{ij} и уравнений Максвелла

- Если $P_{zz} > P_{xx} = P_{yy}$, то вдоль x неустойчива мода с B_y и E_z и ненулевые возмущения имеют компоненты тензора P_{zz}, P_{xx}, P_{xz}

- **Дисперсионное уравнение** в пределе $kv_{Tx} \ll \omega$ (холодный предел):

$$\frac{c^2k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\left(1 - \frac{P_{zz} - P_{xx}}{mn_0}\frac{k^2}{\omega^2}\right)$$

- **Условие неустойчивости:** $P_{zz} - P_{xx} > 0$

- **Неустойчивость** возникает для $k < \sqrt{A}c/\omega_p$, где $A = (P_{zz} - P_{xx})/P_{xx}$ — параметр анизотропии

- **Максимальный инкремент** для $k \approx c/\omega_p\sqrt{A/2}$:

$$\gamma_{\max} \approx \omega_p\sqrt{A}$$

Сравнение с кинетическим описанием

- **Кинетическое дисперсионное уравнение** (точное для бимаксвелловской плазмы):

$$\frac{c^2k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\left[\frac{\omega^2}{k^2 v_{T\parallel}^2} W\left(\frac{\omega}{k v_{T\parallel}}\right) + \frac{T_\perp}{T_\parallel}\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2 v_{T\parallel}^2} W\left(\frac{\omega}{k v_{T\parallel}}\right)\right)\right].$$

Характеристика	Кинетическое описание	Гидродинамическое описание (двухпотоковое)	Гидродинамическое описание (тензор давления)
Усиливаемые волны	$k < \sqrt{A}c/\omega_p$	Все k	$k < \sqrt{A}c/\omega_p$
Максимальный инкремент	$\gamma \approx \omega_p\sqrt{A}$	$\gamma \approx \omega_p$	$\gamma \approx \omega_p\sqrt{A}$

Выводы

- **Гидродинамическое приближение** на уровне моментных уравнений позволяет описать:
  - Двухпотоковую электростатическую неустойчивость.
  - Филаментационную (электромагнитную) неустойчивость.
  - Вейбелевскую неустойчивость в бимаксвелловской плазме.
- **Достоинства:** простота, наглядность, корректное описание длинноволновых мод.
- **Ограничения:** не учитывает резонансное затухание Ландау и требует замыкания (пренебрежение тепловым потоком).
- **Область применимости:** $\lambda \ll L$ (длина волны много меньше масштаба неоднородности) и $kv_T \ll \omega$ (фазовая скорость >> тепловой).

Дома

Вывести дисперсионные соотношение для двухпотоковой электростатической и электромагнитной неустойчивостей